Lycée de Mateur

$4^{ème}$ Maths

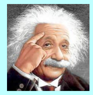
Série d'exercices complexes

Hamda Abbes

2015-2016

Énoncés des exercices

Exercice n:1 **" VRAI-FAUX"**



Cet exercice comporte quatre affirmations repérées par les lettres **a**, **b**, **c** et **d**.
Vous devez indiquer pour chacune de ces affirmations, si elle est vraie **(V)** où fausse **(F)**.
la justification est demandée.
Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a=-2-2i$; $b=2$; $c=2+4i$ et $d=-2+2i$

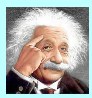
a. $ABCD$ est un parallélogramme

b. Le point E, image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, est un point de l'axe des abscisses.

c. Soient $f=6i-4$ et F le point d'affixe f. Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D.

d. Soient $g=-2i$ et G le point d'affixe g. Le triangle CDG est rectangle et isocèle en C.

Exercice n:2 **" VRAI-FAUX "**



Dans le plan muni d'un repère $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, on considère les points M d'affixe a et N d'affixe b.
tels que a et b soient les solutions de l'équation : $z^2-2z+3=0$. On a :

a. $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=ab$.

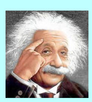
b. $a+b$ est un nombre réel.

c. Le milieu de $[M,N]$ est sur l'axe des abscisses.

d. La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

e. M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 2 .

Exercice n:3



Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $\overline{z}-3iz-3+6i=0$, $\overline{z}$ étant le conjugué de z.

2. On considère le point A d'affixe $4-2i$. Déterminer la forme algébrique de l'affixe du point B tel que OAB soit un triangle équilatéral de sens direct.

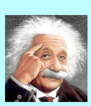
3. Soit le point D d'affixe $2i$.

a. Représenter l'ensemble (E) des points M d'affixe z différente de $2i$ tels que :
$\arg(z-2i)=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

b. Représenter l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que ; $z=2i+2e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

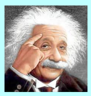
4. A tout point M d'affixe$z\neq-2$, on associe le point M' d'affixe z' telle que $z'=\dfrac{z-1}{\overline{z}+2}$. Déterminer l'ensemble des points M tels que $z'=1$.

Exercice n:4

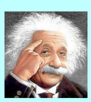


Dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$, on considère les points M et M' d'affixes

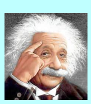
respectives z et z'. On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, où x, x', y, y' sont des nombres réels.
On rappelle que $\overline{z}$ désigne le conjugué de z et que $|z|$ désigne le module de z.
1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont orthogonaux si et seulement si $Re(z'\overline{z}) = 0$.
2. Montrer que les points O, M et M'sont alignés si et seulement si $Im(z'\overline{z}) = 0$.
Applications
3. N est le point d'affixe $z^2 - 1$. Quel est l'ensemble des points M tels que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ soient orthogonaux ?
4. On suppose z non nul. P est le point d'affixe $\dfrac{1}{z^2} - 1$. On recherche l'ensemble $\mathcal{K}$ des points M d'affixe z tels que les points O, N et P soient alignés.
a. Montrer que $\operatorname{Im}\left(\left(\dfrac{1}{z^2} - 1\right)\overline{(z^2 - 1)}\right) = \operatorname{Im}\left(-\overline{z}^2\right)$
b. En utilisant l'équivalence démontrée au début de l'exercice, conclure sur l'ensemble recherché.

Exercice n:5 

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$
1. On considère le point I d'affixe i et le point A d'affixe $z_A = \sqrt{3} + 2i$.
a. Montrer que le point A appartient au cercle Γ de centre le point I et de rayon 2.
Sur une figure (unité graphique 1 cm),qu'on complètera au fur et à mesure de l'exercice, placer le point I, tracer le cercle Γ , puis construire le point A.
b. On considère la rotation r de centre le point I et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Démontrer que le point B image du point A par la rotation r a pour affixe $z_B = -1 + i\left(1 + \sqrt{3}\right)$.
Justifier que le point B appartient au cercle Γ .
c. Calculer l'affixe du point C symétrique du point A par rapport au point I.
d. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.
2. On considère les points E et F tels que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{IB}$ e t $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BI}$.
Que peut-on conjecturer pour les droites (BF) et (CE) ? Valider cette conjecture à l'aide d'une **démonstration**.

Exercice n:6 

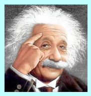
On donne le nombre complexe $z = -\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
a. Exprimer z^2 sous forme algébrique
b. Exprimer z^2 sous forme exponentielle.
c. En déduire z sous forme exponentielle

Exercice n:7 

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par:
$$P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{2})z^2 + (74 - i\sqrt{2})z - 74i\sqrt{2} .$$
a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation $P(z) = 0$.
b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait
$P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b)$.
c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $P(z) = 0$.
2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$. On prendra 1 cm pour unité

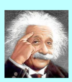
graphique.
a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = -7+5i$; $z_B = -7-5i$ et $z_I = i\sqrt{2}$.
b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$
c. Placer le point C d'affixe $z_C = 1+i$.
Déterminer l'affixe du point N tel que $ABCN$ soit un parallélogramme.
d. Placer le point D d'affixe $z_D = 1+11i$.
Calculer $Z = \dfrac{z_A - z_C}{z_D - z_B}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatère $ABCD$.

Exercice n:8



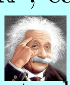
Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$; unité graphique 2 cm.
On appelle A et B les points du plan d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$. On considère l'application f qui,à tout point $M(z) \neq B$, fait correspondre le point M' d'affixe z' définie par: $z' = \dfrac{z-1}{z+1}$.
On fera une figure qui sera complétée tout au long de cet exercice.
1. Déterminer les points invariants de f c'est-à-dire les points M tels que $M = f(M)$.
2. **a**. Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq -1$, $(z'-1)(z+1) = -2$.
b. En déduire une relation entre $z'-1$ et $z+1$, puis entre $\arg(z'-1)$ et $\arg(z+1)$, pour tout nombre complexe $z \neq -1$. Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.
3. Montrer que si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2, alors M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 1.
4. Soit le point P d'affixe $p = -2+i\sqrt{3}$.
a. Déterminer la forme exponentielle de $(p+1)$.
b. Montrer que le point P appartient au cercle $\mathcal{C}$.
c. Soit Q le point d'affixe $q = -\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p. Montrer que les points A, P' et Q sont alignés.
d. En utilisant les questions précédentes, proposer une construction de l'image P' du point P par l'application f .

Exercice n:9



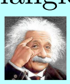
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, calculer $C = \sum\limits_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $S = \sum\limits_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$

Exercice n:10



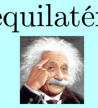
Soient A, B, C trois points du plan affine euclidien, d'affixes respectives a, b, c.
a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + jb + j^2c = 0$.
b) En déduire que le triangle ABC est équilatéral si et seulement si : $a^2 + b^2 + c^2 - (ab + ac + bc) = 0$

Exercice n:11



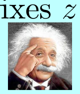
Dans le plan affine euclidien orienté, on construit, extérieurement à un parallélogramme $ABCD$, les triangles équilatéraux BCE et CDF. Montrer que le triangle AEF est équilatéral.

Exercice n:12



Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On note u, v les racines carrées complexes de z. Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}^*$ tels que les points d'affixes z, u, v forment un triangle rectangle de sommet le point d'affixe z.

Exercice n:13



Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ et $S_n = \sum\limits_{p=0}^{n-1} \sum\limits_{q=p}^{n-1} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \omega^{p+q}$

Corrigés des exercices

Exercice n:1

a. Vrai : $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow b-a=c-d \\ &\Leftrightarrow 2-(-2-2i) = (2+4i)-(-2+2i) \\ &\Leftrightarrow 4+2i = 4+2i \end{aligned}$$

b. Vrai : $z_E - b = e^{-i\frac{\pi}{2}}\,(c-b) \Leftrightarrow z_E = 2 - i\,(2+4i-2)$
$$= 6 \in \mathbb{R}$$

c. Vrai : Le triangle CDF est rectangle et isocèle en D si C a pour image F dans la rotation de centre D et
d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$. On vérifie : $f-d = (6i-4)-(-2+2i) = 4i-2 = i\,(4+2i) = c-d$

d. Faux : CDG est rectangle et isocèle en C si G a pour image D dans la rotation de centre C et d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$ Il est facile de voir que c'est faux, car $\dfrac{g-c}{d-c} \neq \pm i$. Par contre on a : $c-d = i\,(g-d)$ alors CDG est isocèle rectangle en D.

Exercice n:2

a. Faux : Résolvons l'équation : $\Delta = \left(2i\sqrt{2}\right)^2$ d'où $a = 1+i\sqrt{2}$ et $b = 1-i\sqrt{2}$ donc $b = \overline{a}$.
Les affixes de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{ON}$ dans le plan muni d'un repère $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$ sont respectivement a et b .
On a donc $ab = a\overline{a} = |a|^2 = 1 + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 3$ et $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON} = 1.1 + \sqrt{2}.\left(-\sqrt{2}\right) = -1$.

b. Vrai : $a+b = a+\overline{a} = 2\,\mathrm{Re}(a) = 2 \in \mathbb{R}$.

c. Vrai : Le milieu de $[M,N]$ a pour affixe $\dfrac{a+b}{2} = \dfrac{a+\overline{a}}{2} = 1$ donc il est sur l'axe des abscisses.

d. Vrai : Les points M et N ont la même abscisse égale à 1 donc la droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

e. Faux : On a $|a| = |\overline{a}| = |b| = 3 \Leftrightarrow OM = ON = 3$ donc M et N appartiennent au cercle de centre O et de rayon 3 .

Exercice n:3

1. $\overline{z} - 3iz - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow (x-iy) - 3i(x+iy) - 3 + 6i = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 + i(-y-3x+6) = 0$,
soit $\begin{cases} x+3y-3 = & 0 \\ -y-3x+6 = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = & -3y+3 \\ 8y-3 = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{8}$ et $x = \dfrac{15}{8}$ alors $z = \dfrac{15}{8} + i\dfrac{3}{8}$.

2. OAB est un triangle équilatéral de sens direct si A a pour image B par la rotation de centre O, d'angle $\dfrac{\pi}{3}$. on a $z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}\,(4-2i) = \left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)(4-2i) = 2 + \sqrt{3} + i\left(2\sqrt{3}-1\right)$.

3. a. $\arg(z-2i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow (\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{DM}}) \equiv \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$; il s'agit de la demi-droite faisant un angle de $\dfrac{\pi}{4}$ avec l'horizontale, passant par D et orientée vers la droite.

b. $z = z = 2i + 2e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z - 2i = 2e^{i\theta} \Leftrightarrow |z-2i| = 2$; il s'agit du cercle de rayon 2 et de centre D.

4. $|z'| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |\overline{z}+2| = \left|\overline{z+2}\right| = |z+2|$;Il s'agit du $med_{[IJ]}$ où I a pour affixe 1 et J a pour affixe -2 .

Exercice n:4

1. $\overrightarrow{OM}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(\vec{u};\vec{v})}$, $\overrightarrow{OM'}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(\vec{u};\vec{v})}$, ils sont orthogonaux$\Leftrightarrow xx'+yy'=0$.

Calculons$z'\overline{z}=(x\prime+iy\prime)(x-iy)=(x'x+y'y)+i(xy'-yx')$. Donc $xx'+yy'=0$ si et seulement si $\mathrm{Re}(z'\overline{z})=0$.

2. O, M et M' sont alignés $\Leftrightarrow$ det $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OM'})=0 \Leftrightarrow xy'-yx'=0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z'\overline{z})=0$.

Applications:

3. Prenons $z'=z^2-1=x^2-y^2-1+2ixy$, alors $xx'+yy'=x(x^2-y^2-1)+y(2xy)=x(x^2+y^2-1)$; le produit scalaire est donc nul si $x=0$ (axe des ordonnées) ou $x^2-y^2-1=0$ (cercle trigonométrique).

4. a. On a $\overline{(z^2-1)}=(\overline{z}^2-1)=-\overline{z}^2\left(-1+\frac{1}{\overline{z}^2}\right)=-\overline{z}^2\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}$

donc $\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}\right)=\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)-\overline{z}^2\overline{\left(\frac{1}{z^2}-1\right)}\right)=\mathrm{Im}\left(-\overline{z}^2\left|\frac{1}{z^2}-1\right|^2\right)$.

puisque $\left|\frac{1}{z^2}-1\right|\in\mathbb{R}$ alors $\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}\right)=\mathrm{Im}\left(-\overline{z}^2\right)$

b. Les points O, N et P alignés$\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}\left(\left(\frac{1}{z^2}-1\right)\overline{(z^2-1)}\right)=0\Leftrightarrow \mathrm{Im}\left(-\overline{z}^2\right)=0$

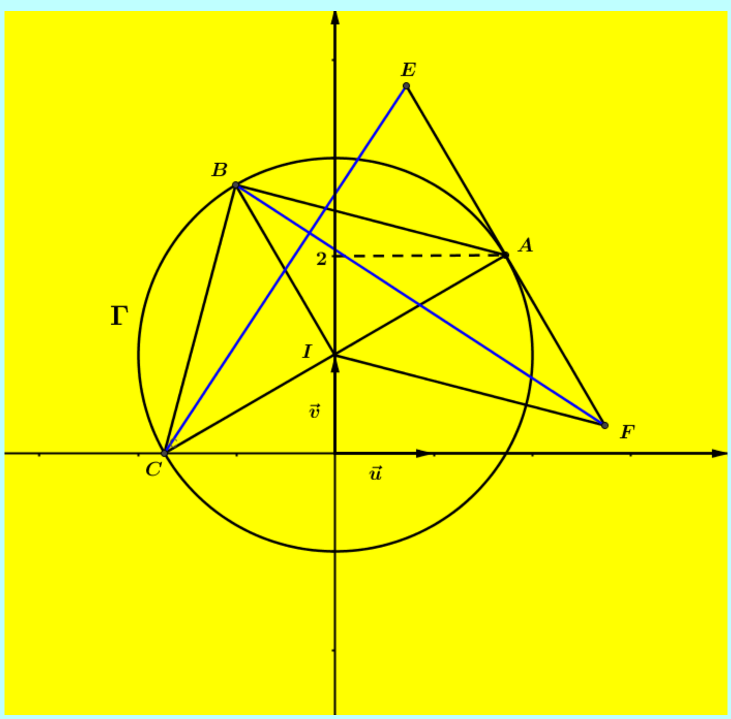
on a $-\overline{z}^2=-(x-iy)^2=-x+y+2ixy$ alors $\mathrm{Im}\left(-\overline{z}^2\right)=0\Leftrightarrow xy=0$.Donc l'ensemble cherché $\mathcal{K}$ est la réunion des axes des abscisses et des ordonnées.

Exercice n:5

1. a. On a $I(i)$ et $A(\sqrt{3}+2i)$ donc $IA=|z_A-z_I|=\sqrt{3+1}=2$ .Le point A appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre le point I et de rayon 2 Pour construire le point A il suffit de tracer l'horizontale contenant le point $2i$ qui coupe le cercle $\mathcal{C}$. A est le point d'abscisse positive.

b. Par définition un point M d'affixe z a pour image M' d'affixe z' tel que $z'-z_I=e^{i\frac{\pi}{2}}(z-z_I)$, soit $z'-i=i(z-i)\Leftrightarrow z'=iz+1+i$; on a donc $z_B=i\left(\sqrt{3}+2i\right)+1+i=-1+i\left(\sqrt{3}+1\right)$

La rotation est une isométrie, donc $IA=IB=2$ d'après la question **1.a.** : le point B appartient donc au cercle $\mathcal{C}$.



c. Par définition du milieu $z_I=\dfrac{z_A+z_C}{2}\Leftrightarrow z_C=2z_I-z_A=2i-\left(2i+\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}$.

d. Par définition de la rotation, la droite (BI) est perpendiculaire à la drtoite (IA).
D'autre part $[AC]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$.
Le triangle ABC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$; un de ses côtés est un diamètre, il est donc rectangle en B et (BI) étant à la fois hauteur et médiane, le triangle ABC est isocèle en B.Le triangle ABC est rectangle isocèle en B.

2. Il semble que (BF) et (CE) soient perpendiculaires et de même longueur.

<u>**Démonstration**</u> : il suffit de vérifier que $\dfrac{z_E-z_C}{z_F-z_B}=\pm i$

$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow z_E=z_B-z_I+z_A=-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)-i+\sqrt{3}+2i=-1+\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)$.

$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BI}\Leftrightarrow z_F=z_I-z_B+z_A=i+1-i\left(1+\sqrt{3}\right)+\sqrt{3}+2i=1+\sqrt{3}+i\left(2-\sqrt{3}\right)$.

Alors $\dfrac{z_E-z_C}{z_F-z_B}=\dfrac{-1+2\sqrt{3}+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2+\sqrt{3}+i\left(1-2\sqrt{3}\right)}=i$.

Exercice n:6

a.
$z^2=\left(-\sqrt{2+\sqrt{2}}+i\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$.

b. $z^2=2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}$

$$=4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=4e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

c. $z^2=4e^{-i\frac{\pi}{4}}\Rightarrow |z^2|=|z|^2=4\Leftrightarrow |z|=2$

$\arg\left(z^2\right)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]\Leftrightarrow 2\arg\left(z\right)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]\Leftrightarrow\arg\left(z\right)\equiv-\dfrac{\pi}{8}\,[\pi]$

Sur $[-\pi;\pi[$, on aurait soit $z_1=2e^{-i\frac{\pi}{8}}$,soit $z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.
Le signe de la partie réelle et de la partie imaginaire de z donné dans l'énoncé nous donne $z=z_2=2e^{i\frac{7\pi}{8}}$.

Exercice n:7

1. a. iy solution de l'équation $P(z)=0$, soit $P(iy)=0$, soit
$-iy^3-(1-i\sqrt{2})y^2+(74-i\sqrt{2})iy-74i\sqrt{2}=0\Leftrightarrow(y^2+2y)+i(-y^3+2y\sqrt{2}+74y-74\sqrt{2})=0$.
Ceci donne le système
$\begin{cases} y^2+2y & =0\\ -y^3+2y\sqrt{2}+74y-74\sqrt{2} & =0\end{cases}$; la première ligne donne comme solutions $y=0$ qui ne convient pas dans la seconde ligne et $y=-\sqrt{2}$ qui convient.

b. $P(z)=(z-i\sqrt{2})(z^2+az+b)=(z-i\sqrt{2})(z^2+z+74)$.

c. $P(z)=0\Leftrightarrow z^2+z+74=0$, $\Delta=1-296=-295$ d'où les racines $z_1=-i\sqrt{2}, z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{295}}{2}$ et $z_3=\dfrac{-1+i\sqrt{295}}{2}$

2. b. $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z_I=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i\sqrt{2}=-1+i$

c. $ABCN$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{NC}\Leftrightarrow z_N=z_A-z_B+z_C=-7+5i+7+5i+1+i=1+11i$.

d. Calculer $Z=\dfrac{z_A-z_c}{z_D-z_B}=\dfrac{-7+5i-(1+i)}{1+11i+7+5i}=\dfrac{-8+4i}{8+16i}=\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$.On a donc $\widehat{(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{CA})}\equiv\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Donc les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires ; comme $ABCD$ est un parallélogramme, alors $ABCD$ c'est un losange.

Exercice n:8

1. $M = f(M)$, soit $z = \dfrac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow z^2 = -1 \Leftrightarrow z = -i$ ou $z = i$. Il y a donc deux points invariants : $(0;1)$ et $(0;-1)$

2. a. pour tout nombre z différent de -1 on $(z'-1)(z+1) = \left(\dfrac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = -2$.

b. En passant la relation précédente au module, on a : $|z'-1|\,|z+1| = 2 \Leftrightarrow |z'-1| = \dfrac{2}{|z+1|}$

De même en passant à l'argument : $\arg(z'-1) + \arg(z+1) \equiv \arg(-2)\,[2\pi]$

$\equiv \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow \arg(z'-1) \equiv \pi - \arg(z+1)\,[2\pi]$.

c. Ceci se traduit par : $AM' = \dfrac{2}{BM}$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi\,[2\pi]$

3. Si M appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon 2, alors $BM = 2$ d'où $AM' = \dfrac{2}{BM} = 1$ donc M' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de rayon 1.

4. a. $p + 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b. On a $|p+1| = \left|2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| = 2$, donc P appartient au cercle $\mathcal{C}$.

c. $q = -\overline{p} = -(-2 - i\sqrt{3}) = 2 + i\sqrt{3} \Rightarrow q + 1 = 3 + i\sqrt{3}$; par ailleurs comme P appartient au cercle $\mathcal{C}$ donc son

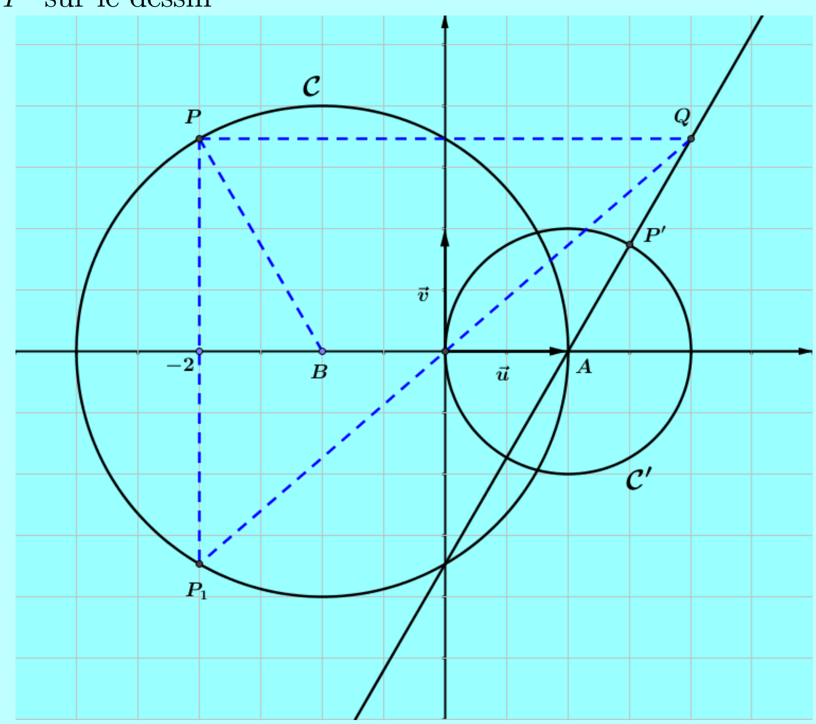
image P' appartient au cercle $\mathcal{C}'$ d'après la question **3**. (ou encore $AP' = 1$).

D'autre part : $\left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{AP'}}\right) \equiv \pi - \left(\widehat{\overrightarrow{u};\overrightarrow{BP}}\right)[2\pi] \equiv \pi - \dfrac{2\pi}{3}\,[2\pi] \equiv \dfrac{\pi}{3}\,[2\pi]$. et $AP' = 1$;

donc $p' - 1 = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow p' = \dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $q - 1 = 1 + i\sqrt{3}$. On a donc $p' - 1 = \dfrac{1}{2}(q-1) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$.

d. Pour ceux qui ont cherché le rapport de proportionnalité entre les deux vecteurs (avec la méthode cidessus ou une autre) on peut dire que P' est le milieu de $[AQ]$.

Il faut placer P, Q et P' sur le dessin



Exercice n:9

On a : $C+iS=\sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)}=e^{ia}\sum_{k=0}^{n}\left(e^{ib}\right)^k$.

Si $b\neq 2\pi h$ $(h\in\mathbb{Z})$, alors $e^{ib}\neq 1$, donc : $C+iS=e^{ia}\dfrac{e^{i(n+1)b}-1}{e^{ib}-1}$

$$=e^{ia}\frac{e^{i\frac{(n+1)b}{2}}\left(e^{i\frac{(n+1)b}{2}}-e^{-i\frac{(n+1)b}{2}}\right)}{e^{i\frac{b}{2}}\left(e^{i\frac{b}{2}}-e^{-i\frac{b}{2}}\right)}$$

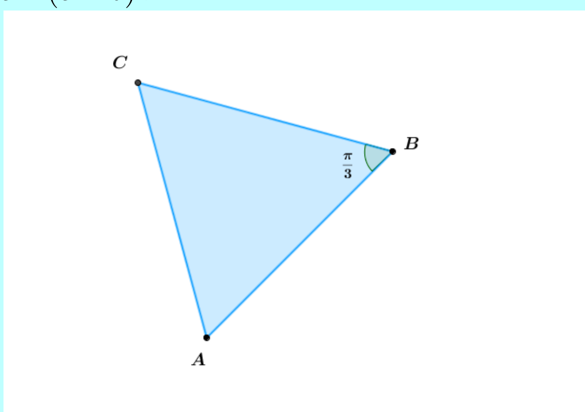
$$=e^{i\left(a+\frac{nb}{2}\right)}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

Si $b=2\pi h$ $(h\in\mathbb{Z})$, alors $C+iS=(n+1)e^{ia}$.
On déduit C et S en prenant la partie réelle et la partie imaginaire.On conclut :

$$C=\begin{cases}\cos(a+\frac{nb}{2})\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} & \text{si } b\neq 2\pi h\ (h\in\mathbb{Z})\\ (n+1)\cos a & \text{si } b=2\pi h\ (h\in\mathbb{Z})\end{cases}\quad \text{et } S=\begin{cases}\sin(a+\frac{nb}{2})\dfrac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)} & \text{si } b\neq 2\pi h\ (h\in\mathbb{Z})\\ (n+1)\sin a & \text{si } b=2\pi h\ (h\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

Exercice n:10

a) ABC est équilatéral direct si et seulement si A se déduit de C par la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$
C'est-à-dire : (1) $a-b=e^{i\frac{\pi}{3}}(c-b)$.



Mais $e^{i\frac{\pi}{3}}=-j^2$, donc : $(1)\iff a-b+j^2(c-b)=0\iff a-(1+j^2)b+j^2c=0\iff a+jb+j^2c=0$.
Remarque: $1+i+j^2=0$.

b) ABC est équilatéral $\iff\begin{cases}ABC \text{ équilatéral direct}\\ \text{ou}\\ ABC\text{ équilatéral indirect}\end{cases}$

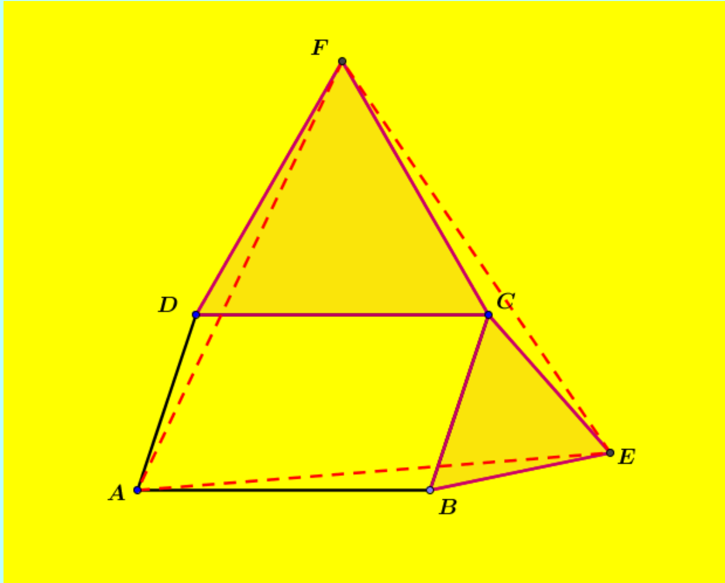
$$\iff\begin{cases}a+jb+j^2c=0\\ \text{ou}\\ a+jc+j^2b=0\end{cases}$$

$$\iff (a+jb+j^2c)(a+j^2b+jc)=0$$

$$\iff a^2+b^2+c^2-(ab+ac+bc)=0.$$

Exercice n:11

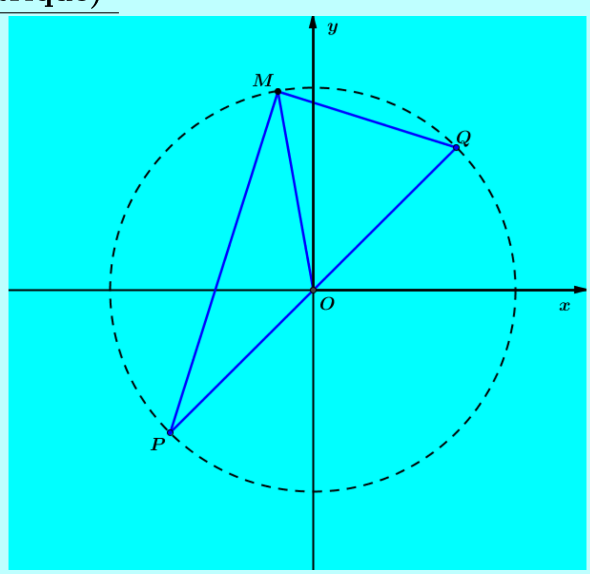
Notons a,b,c,d les affixes complexes de A,B,C,D respectivement.Puisque $ABCD$ est un parallélogramme, on a : $a+c=b+d$.



On a :
BCE équilatéral (indirect) $\Longleftrightarrow \overrightarrow{BE} = Rot_{-\frac{\pi}{3}}\left(\overrightarrow{BC}\right)$
$\Longleftrightarrow e - b = e^{-i\frac{\pi}{3}}\left(c - b\right)$
$\Longleftrightarrow e - b = -j\left(c - b\right)$
$\Longleftrightarrow e = b - j\left(c - b\right) = \left(1 + j\right)b - jc = -j^2b - jc$
De même, puisque CDF est équilatéral (indirect), on a : $f = -j^2c - jd$.
Pour montrer que AEF est équilatéral (direct), on calcule :
$f + ja + j^2e = (-j^2c - jd) + ja + j^2(-j^2b - jc)$
$= -j2c - jd + ja - jb - c$
$= ja - jb - (1 + j2)c - jd$
$= ja - jb + jc - jd$
$= j(a - b + c - d)$
$= 0$
On conclut que AEF est équilatéral (direct).

Exercice n:12

Première méthode(géométrique)



Notons M, P, Q les points d'affixes respectives z, u, v. Pour que le triangle MPQ soit rectangle en M, il faut et il suffit que M soit sur le cercle de diamètre $[PQ]$, ce qui équivaut à $OM = OP$.

Et :$OM = OP \iff |z| = |u| \iff |u|^2 = |u| \iff |u| = 0$ (exclu) ou $|u| = 1 \iff |z| = 1$.On conclut que l'ensemble cherché est l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Deuxièmeméthode(algébrique)

Puisque u, v sont les racines carrées complexes de z, on a : $v = -u$ et $z = u^2$.

On a : (z, u, v) rectangle en z
$$\begin{aligned} &\iff \mathrm{Re}\,\overline{(u-z)}\,(v-z) = 0 \\ &\iff \mathrm{Re}\,(\overline{u} - \overline{u}^2)(-u-u^2) = 0 \\ &\iff (\overline{u} - \overline{u}^2)(-u-u^2) + (u-u^2)(-\overline{u} - \overline{u}^2) = 0 \\ &\iff -2|u|^2 + 2|u|^4 = 0 \\ &\iff |u| = 0 \text{ (exclu) ou } |u| = 1 \iff |z| = 1. \end{aligned}$$

Exercice n:13

On a, en utilisant une permutation de deux symboles $\sum$ et la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} S_n = \sum_{p=0}^{n-1}\sum_{q=p}^{n-1}\binom{q}{p}\omega^{p+q} &= \sum_{q=0}^{n-1}\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\omega^{p+q} \\ &= \sum_{q=0}^{n-1}\left[\sum_{p=0}^{q}\binom{q}{p}\omega^{p}\right]\omega^q \\ &= \sum_{q=0}^{n-1}(1+\omega)^q\,\omega^q \\ &= \sum_{q=0}^{n-1}((1+\omega)\,\omega)^q\,. \end{aligned}$$

Pour calculer cette sommation de progression géométrique,voyons si $(1+\omega)\omega$ peut être égal à 1 ou non. On a :

$(1+\omega)\omega = 1 \iff \omega^2 + \omega - 1 = 0 \iff \omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .Mais $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ne sont pas des racines n-èmes de 1 dans $\mathbb{C}$ (car de modules différents de 1), donc $(1+\omega)\omega \neq 1$.

On a alors, par sommation d'une progression géométrique et puisque $\omega^n = 1$:

$$S_n = \frac{1 - ((1+\omega)\,\omega)^n}{1 - (1+\omega)\,\omega} = \frac{1 - (1+\omega)^n}{1 - \omega^2 - \omega}.$$

Cliquez ici