Exercice 1 : (QCM)

1) Soit X la variable aléatoire indiquant la durée de vie d'une machine en années.

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.25$.

i) La probabilité que la machine dure plus de 4 ans est :

a) $1-e^{-1}$; b) e^{-1} ; c) $e^{-1}-1$

ii) La probabilité que la machine dure moins de 8 ans sachant qu'elle a duré plus que 4 ans est égale

a) $1-e^{-1}$; b) e^{-1} c) $e^{-1}-1$

2) Une urne contient quatre boules rouge et une boule noire. On effectue au hasard des tirages successifs et sans remise d'une boule et on s'arrête dés qu'on a tiré la boule noire.

La probabilité p d'avoir effectué trois tirages avant de s'arrêter est :

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{3}{5}$

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (C) est la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+\ln x}$. On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de la courbe constitué des points de (C), d'abscisses comprises entre 1 et e. Le volume V du solide ainsi engendré vaut :

a) π ; b) πe ; c) $\pi(e-1)$.

Exercice 2 :

Une classe de terminale compte 30 élèves dont 20 filles. A chaque cours de mathématiques, le professeur de cette classe interroge au hasard un élève. D'un cours à l'autre, le professeur ne se rappelle pas de l'élève interrogé au cours précédent ce qui fait qu'à chaque cours, le choix de l'élève par le professeur est indépendant des choix précédents.

1) Quelle est la probabilité, à un cours donné, que l'élève interrogé soit une fille?

2) n est un entier positif. On appelle X la variable aléatoire définie par : "X = nombre de filles interrogées durant n cours de mathématiques consécutifs"

Quelle est la loi de probabilité de X?

3) Quelle est la probabilité que le nombre de filles interrogées soit égal à 4 durant 10 cours consécutifs?

4) Quelle doit être le nombre minimum de cours consécutifs pour que la probabilité qu'aucune fille ne soit interrogée soit inférieur à 0,001?

5) Durant un trimestre, il y a 36 cours de mathématiques. Quel nombre de filles interrogées peut-on espérer?

Exercice 3 :

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = e^{\frac{1}{2x}} - x$

1) a) Etudier le sens de variation de la fonction f.

b) En déduire que l'équation f(x) = 0 admet une unique solution α sur $]0,+\infty[$ et que : $\frac{5}{4} \le \alpha \le \frac{3}{2}$

2) a) Soit $I = \left[\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right]$; montrer que $f(I) \subset I$

b) Démontrer que, pour tout réel x de I, on a : $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$

c) En déduire que, pour tout réel x de I, on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{1}{2}|x - \alpha|$

3) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 5/4 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad , n \in IN \end{cases}$

a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+2}}$

c) En déduire que la suite (u_n) converge et préciser sa limite.

Exercice 4 :

I/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = x - \ln(x) - 1$

1) Dresser le tableau de variation de g.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x - \ln(x)} & si\ x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

c) Dresser le tableau de variation de f et construire sa courbe.

II/ Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $F(x) = \int_1^x f(t)dt$.

1) Etudier la variation de F.

2) Montrer que pour $t \in [0;1]$, $on\ a : -1 \leq f(t) \leq t - 1$. En déduire que : $\frac{1}{2} \leq F(0) \leq 1$.

3) a) Prouver que pour tout $t \geq 1$, on a : $f(t) \geq \frac{\ln(t)}{t}$

b) Calculer $\int_1^x \frac{\ln(t)}{t}dt$. En déduire $\lim_{x \to +\infty} F(x)$.

4) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \int_n^{n+1} f(t)dt = F(n+1) - F(n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $on\ a : f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

b) Montrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

5) On pose pour tout $n \geq 2 : S_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} u_k = u_1 + u_2 + ... + u_{n-1}$.

a) Exprimer S_n en fonction de F

b) Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$