(Anciens sujets Bac 4ième Sciences).

Exercice N°6 Session de contrôle 2012

EXERCICE 4 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe on a représenté , dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$,

la courbe C_f de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^x+x+2}{e^x+1}$.

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ et tracer l'asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

2) a/ Vérifier que pour tout réel x , $f(x)=x+2-\dfrac{xe^x+e^x}{e^x+1}$.

b/ En déduire que C_f admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote Δ qu'on précisera.

c/ Etudier la position relative de la courbe C_f et l'asymptote Δ puis tracer Δ.

3) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1-xe^x}{(e^x+1)^2}$.

4) Soit α l'abscisse du point A de la courbe C_f où la tangente est horizontale.

a/ Vérifier que α est différent de 0.

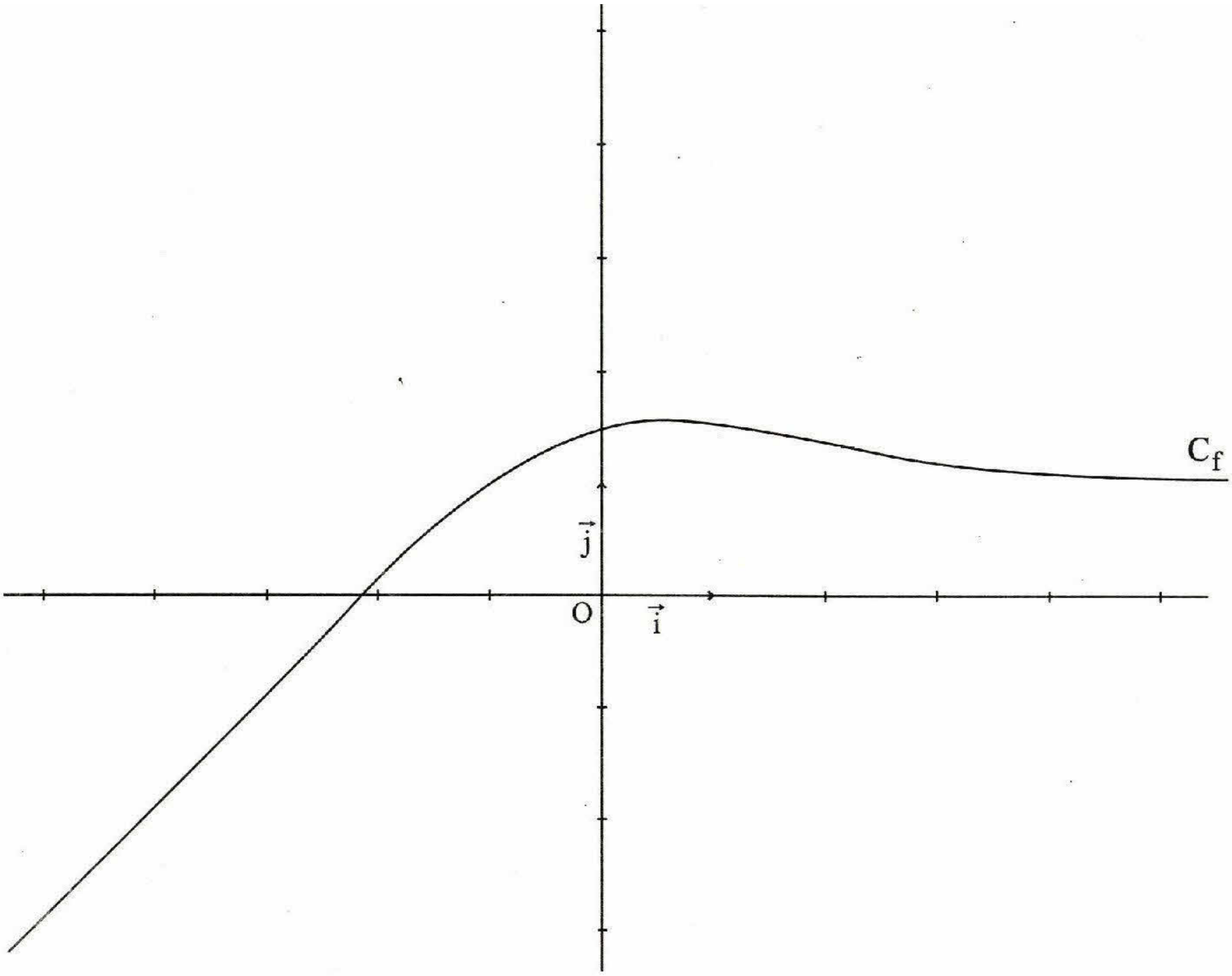
b/ Montrer que $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ puisque $f(\alpha)=\alpha+1$.

c/ Construire alors le point A et la tangente à la courbe C_f au point A.

5) Soit h la restriction de f à l'intervalle $[\alpha,+\infty[$.

a/ Montrer que h réalise une bijection de l'intervalle $[\alpha,+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

b/ Tracer la courbe de h^{-1} dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

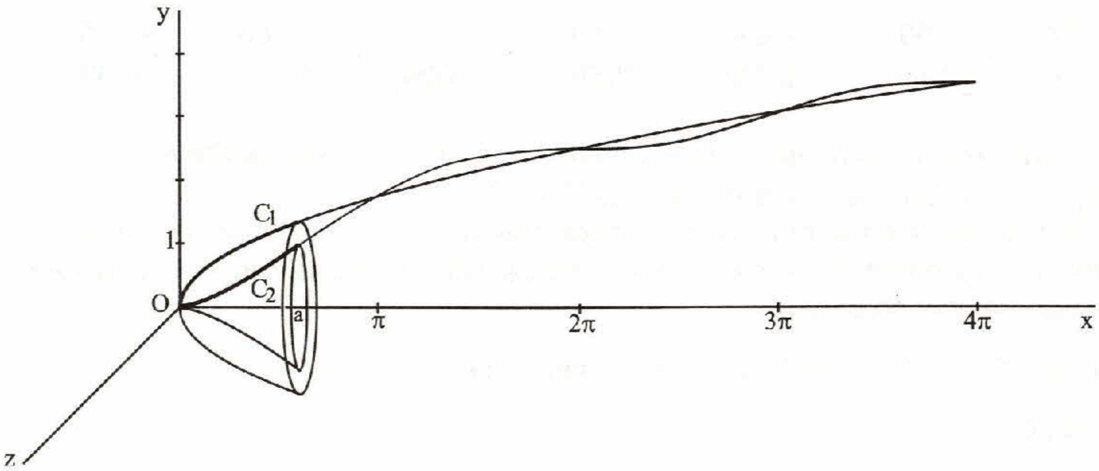

C_f
j
O
i

EXERCICE 5 (3 points)

Dans la figure ci-dessous on a représenté, dans un repère orthonormé, les fonctions f et g définies sur $[0,4\pi]$ par $f(x)=\sqrt{x}$ et $g(x)=\sqrt{x-\sin x}$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0,4\pi]$, $C_1=\{M(x,y) \text{ tels que } y=f(x) \text{ et } x\in[0,a]\}$

et $C_2=\{M(x,y) \text{ tels que } y=g(x) \text{ et } x\in[0,a]\}$.



On désigne par υ_1 le volume engendré par la rotation de C_1 autour de (Ox) et par υ_2 le volume engendré par rotation de C_2 autour de (Ox).

1) Montrer que $\upsilon_1 = \frac{\pi}{2}a^2$.

2) Montrer que $\upsilon_2 = \upsilon_1 + \pi(\cos a - 1)$.

3) a/ Montrer que, pour tout $a\in]0,4\pi]$, $\upsilon_2 \leq \upsilon_1$.

b/ Pour quelles valeurs de a, a-t-on $\upsilon_2 = \upsilon_1$?

Exercice N°7 Session principale2011

Exercice 3 (6 points)

Dans l'annexe ci-jointe (page 3/3), on a représenté dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe C de la fonction logarithme népérien («ln »).

1) Placer les points de la courbe C d'abscisses e et $\sqrt{e}$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\ln^2 x-\ln x+1$.

On note C_f sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\frac{2\ln x-1}{x}$.

d) Dresser le tableau de variation de f.

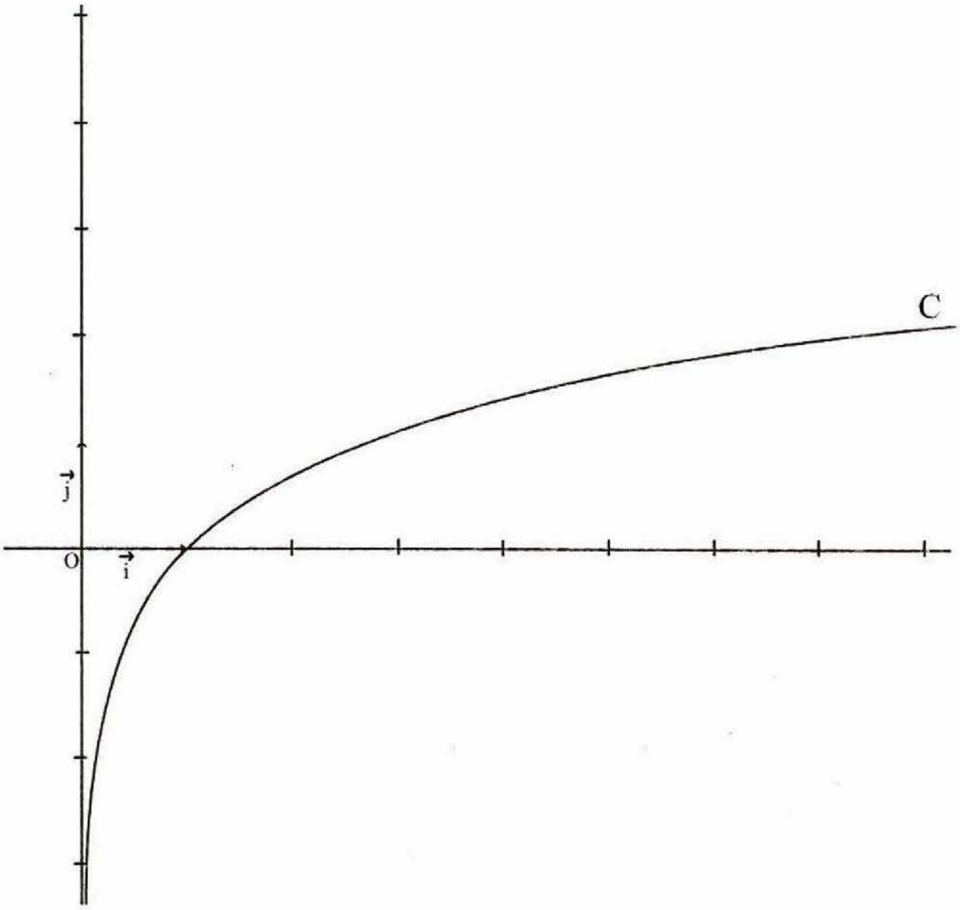
3) a) Etudier la position relative des courbes C_f et C.

b) Tracer C_f dans l'annexe ci-jointe.

4) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et C_f et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

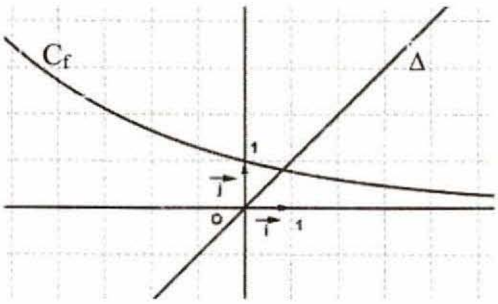
a) Montrer que $\int_1^e \ln^2 x\,dx = e-2$.

b) Calculer A.



Exercice 4 (5 points)

Dans la figure ci-contre on a représenté dans un repère orthonormé la courbe C_f de la fonction $f : x \mapsto e^{-\frac{x}{4}}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1) a) Utiliser le graphique pour justifier que l'équation

$e^{-\frac{x}{4}} = x$ admet dans [0, 1] une solution unique α.

b) Vérifier que $0.8 < \alpha < 0.9$.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n)\ ;\ n \geq 0 \end{cases}$$

a) Montrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4}\ |U_n - \alpha|$.

d) En déduire que pour tout entier naturel n, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$.

e) Montrer que la suite (U_n) est convergente vers α.

3) a) Déterminer un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, $|U_n - \alpha| < 10^{-3}$.

b) En déduire une valeur approchée de α à 10^{-3} près .

Exercice N°8 Session de contrôle 2011

Exercice 3 (6 points)

I – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) En déduire que pour tout réel x, $e^x - x \geq 1$.

II – Dans la figure de l'annexe ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C_g d'une fonction g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

La droite d'équation x = 0 est une asymptote à la courbe C_g.

La courbe C_g admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

1) a) Déterminer g(1), g(2) et g(3).

b) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

c) Déterminer le signe de $g'(x)$.

2) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = e^{g(x)}$ et soit C_h sa courbe représentative.

a) Calculer h(1), h(2) et h(3).

b) Justifier que $\lim\limits_{x \to 0^+} h(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$.

c) En écrivant $\dfrac{h(x)}{x} = \dfrac{e^{g(x)}}{g(x)} \cdot \dfrac{g(x)}{x}$, pour $x > 2$, montrer que la courbe C_h admet, au voisinage de $+\infty$, une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

d) Dresser le tableau de variation de h.

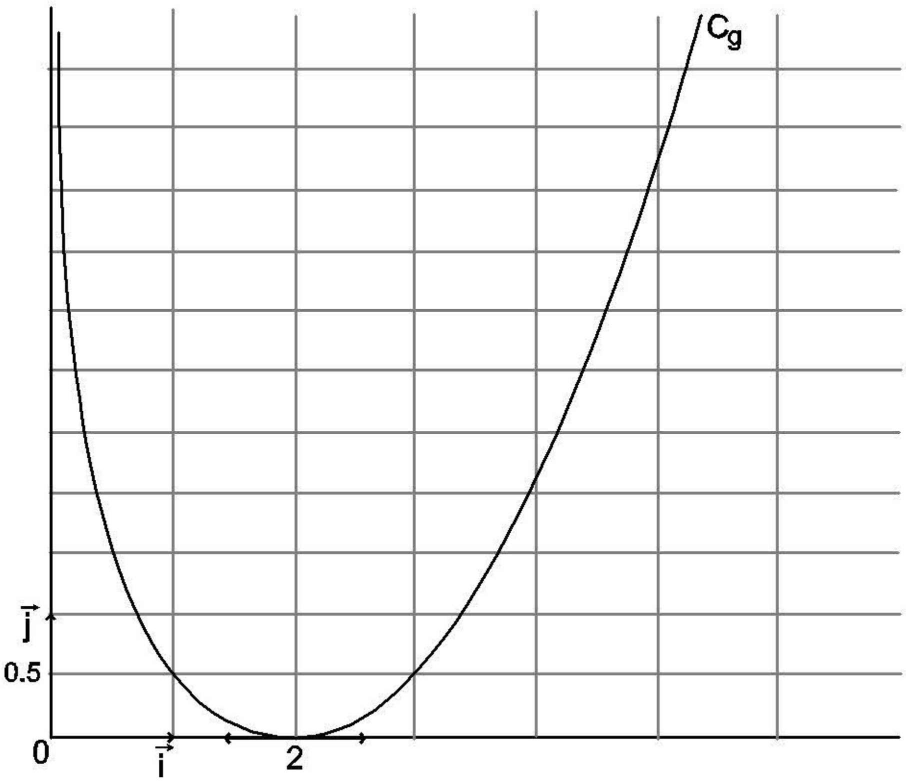
3) Soit $\alpha > 0$.

On note M et N les points des courbes C_g et C_h d'abscisse α.

a) Calculer la distance MN en fonction de $g(\alpha)$.

b) Montrer que la distance MN est minimale lorsque $\alpha = 2$.

4) Tracer la courbe C_h dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exercice 4 (5 points)

1) Soit a un réel strictement positif et x un réel de l'intervalle [a, a+1].

   a) Ordonner du plus petit au plus grand les réels $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{a+1}$.

   b) Déduire que $\frac{1}{a+1} \leq \ln(a+1) - \ln(a) \leq \frac{1}{a}$. (1)

2) Soit (S_n) la suite définie pour $n \geq 2$ par $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$.

   a) Montrer, en utilisant (1), que $S_n - 1 \leq \ln(n) \leq S_n$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{S_n}$.

3) On pose, pour tout entier naturel $n \geq 2$, $U_n = S_n - \ln(n)$

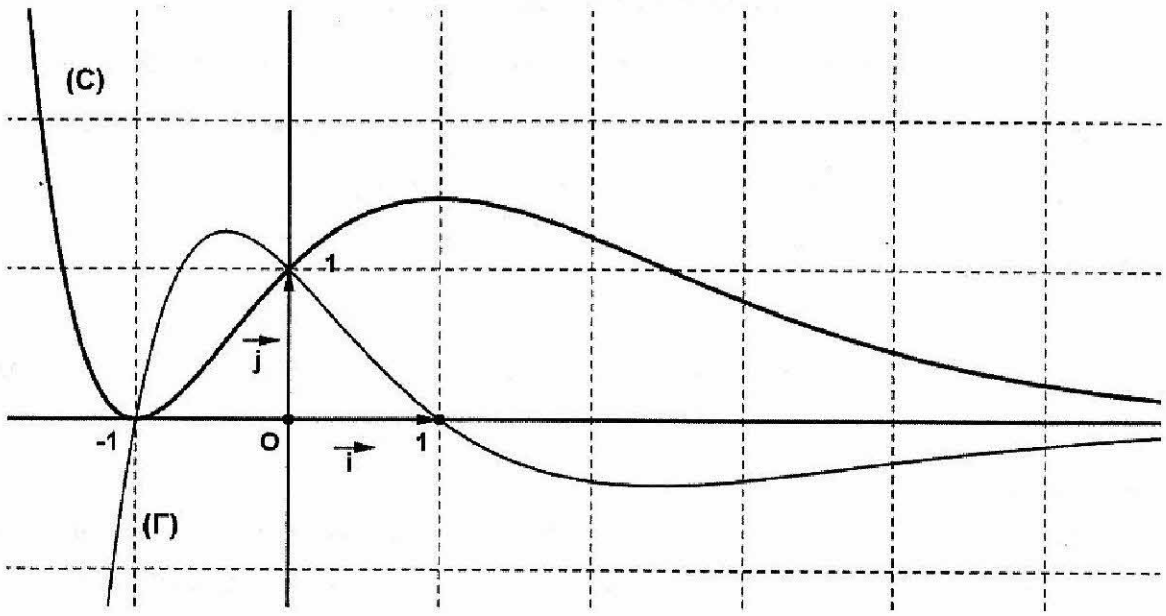
   a) Montrer que la suite (U_n) est minorée.

   b) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

Exercice N°9 Session principale 2010

I) On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes (C) et (Γ), représentatives d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.



1) Reconnaître la courbe représentative de f et celle de f'.
2) Déterminer f(0), f' (0), f(-1) et f' (-1).
3) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe de f' , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

II) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$.

1) a) A l'aide d'une double intégration par parties, montrer que $\int_{-1}^{0} f(x)dx = 2e - 5$.

   b) Déterminer l'aire $\mathcal{A}'$ de la partie du plan limitée par les courbes (C) et (Γ) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $[1, +\infty[$ une solution unique α et que $1,41 < \alpha < 1,42$.

c) Montrer que g^{-1} est dérivable en α et que $(g^{-1})'(\alpha) = \dfrac{\alpha+1}{\alpha(1-\alpha)}$, ($g^{-1}$ désigne la fonction réciproque de g).

Exercice N°10 Session de contrôle 2010

Dans l'annexe ci-jointe est représentée dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe $(\mathscr{C})$ d'une fonction f définie, dérivable et strictement croissante sur $]-1, 1[$. Les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes à $(\mathscr{C})$. La droite (T) est la tangente à $(\mathscr{C})$ en O.

1) En utilisant le graphique déterminer f(0) et f '(0).

2) Soit g la fonction réciproque de f et $(\mathscr{C}')$ sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer g(0) et g'(0).

b) Tracer la courbe $(\mathscr{C}')$.

3) Sachant que l'expression de g est de la forme $g(x) = \dfrac{e^x + a}{e^x + b}$, montrer en utilisant ce qui précède que $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

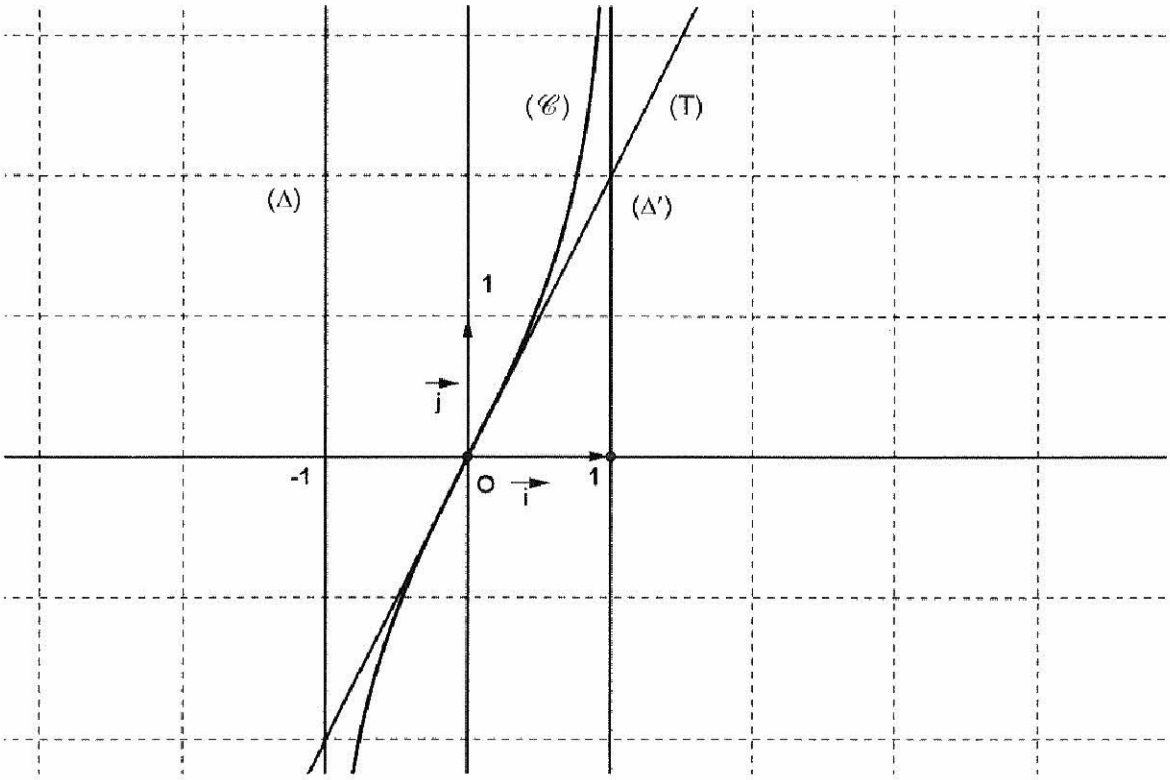
4) a) Vérifier que $\dfrac{1}{e^x+1} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculer alors $\int_0^1 g(x)dx$.

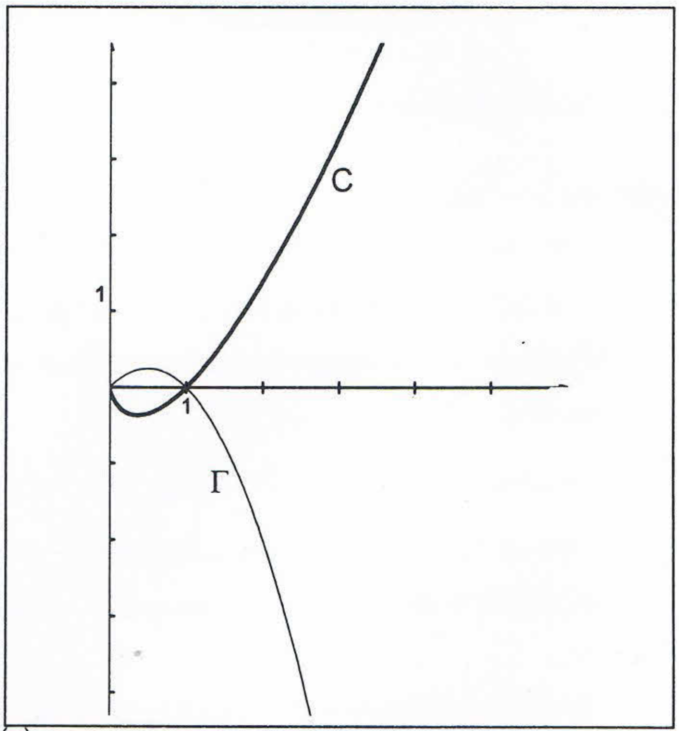
5) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les courbes $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ et les droites d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

a) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - 2\int_0^1 g(x)dx$.

b) En déduire $\mathscr{A}$.



Exercice N°11 Session principale 2009



1) Dans le graphique ci-contre, C et Γ sont les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des deux fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}_+$ par $u(x) = -x^2 + x$ et $v(x) = x\ln x$ pour $x > 0$, $v(0) = 0$.

   Par une lecture graphique

   a) Reconnaître la courbe de chacune des deux fonctions u et v.

   b) Donner le signe de $u(x) - v(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}x^2\ln x\,,\ \text{si } x > 0.$$

   f est-elle dérivable à droite en 0 ?

3) a) Vérifier que pour tout $x \geqslant 0$; $f'(x) = u(x) - v(x)$.

   b) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes C et Γ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$.

4) On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a) Etudier les variations de f.

   b) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ coupe l'axe $(O, \vec{i})$ en un seul point autre que O.

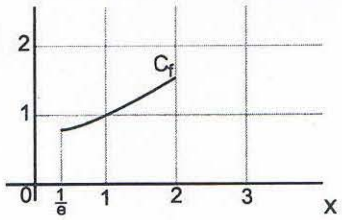
   On notera α l'abscisse de ce point. Vérifier que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

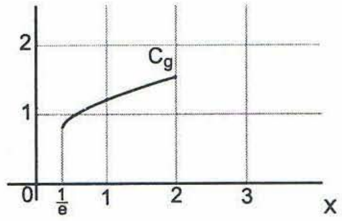
   c) Tracer $\mathscr{C}_f$. (on précisera la demi-tangente à $\mathscr{C}_f$ au point O).

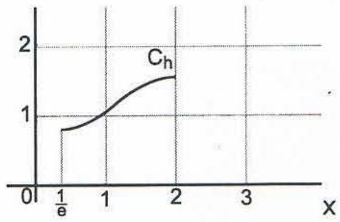
Exercice N°12 Session de contrôle 2009

Exercice 2 (3 points)

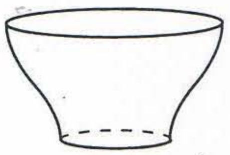
Les courbes C_f , C_g et C_h ci-dessous sont les représentations graphiques, dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, de trois fonctions f, g et h.







Les solides S_1 , S_2 et S_3 ci-dessous sont obtenus par rotation autour de l'axe (Ox) des courbes C_f , C_g et C_h .



S_1

S_2

S_3

1) Associer à chaque courbe le solide qu'elle engendre .

2) a) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'intégrale $I = \int_{\frac{1}{e}}^{2} x \ln x \, dx$.

b) C_f étant la courbe de la fonction f définie sur $\left[\frac{1}{e}, 2\right]$ par $f(x) = \sqrt{1 + x\ln x}$, calculer le volume

EXERCICE 5 (5 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = -1 + \dfrac{x-1}{x+1}e^x$. On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{(x+1)^2}e^x$.

b) Donner le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]-1, +\infty[$ une unique solution α et que $1{,}5 < \alpha < 1{,}6$.

b) Vérifier que $e^\alpha = \dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}$ et que $f(-\alpha) = 0$.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat.

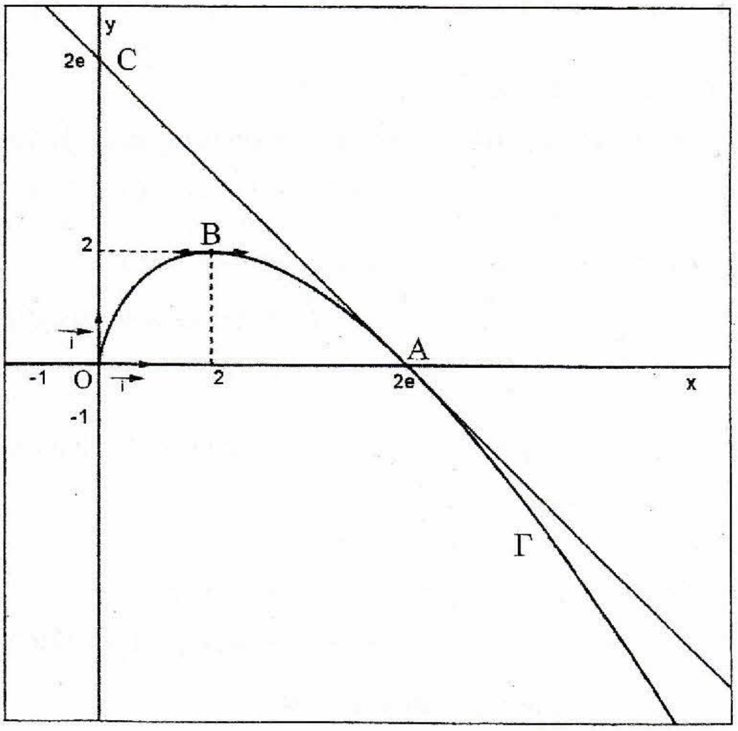
b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

Exercice N°13 Session principale 2008

Dans le graphique ci-contre :

Γ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé, d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$ et dérivable sur $]0,+\infty[$.

- Les points O, A et B appartiennent à Γ.
- La droite (AC) est la tangente à Γ au point A.
- Γ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.



1) Par une lecture graphique :

a) Déterminer f (0), f (2), f (2e), f '(2) et f '(2e).

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Justifier que la restriction g de f à l'intervalle $[2,+\infty[$ admet une fonction réciproque g^{-1} et préciser l'ensemble de définition de g^{-1}.

2) On admet que g est définie par $g(x) = x(1 + \ln 2 - \ln x)$, pour tout $x \geqslant 2$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de g et par $\mathscr{C}'$ celle de g^{-1} dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ du plan. Tracer, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

3) Soit D la partie du plan limitée par les axes $\left(O, \vec{i}\right)$ et $\left(O,\vec{j}\right)$ et les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.

a) Hachurer D.

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_2^{2e} g(x)\, dx = e^2 - 3$.

c) Calculer l'aire de D.

EXERCICE 3 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \dfrac{k}{e^k} = -\dfrac{1}{e}+\dfrac{2}{e^2}-\dfrac{3}{e^3}+\cdots+(-1)^n\dfrac{n}{e^n}$.

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $(2n+2)-e(2n+1)<0$.

b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n,

$$u_{2n+2}-u_{2n} = \frac{1}{e^{2n+2}}\left[(2n+2)-e(2n+1)\right].$$

En déduire que la suite $(u_{2n})_{n\geq1}$ est décroissante.

2) Montrer que la suite $(u_{2n+1})_{n\geq1}$ est croissante.

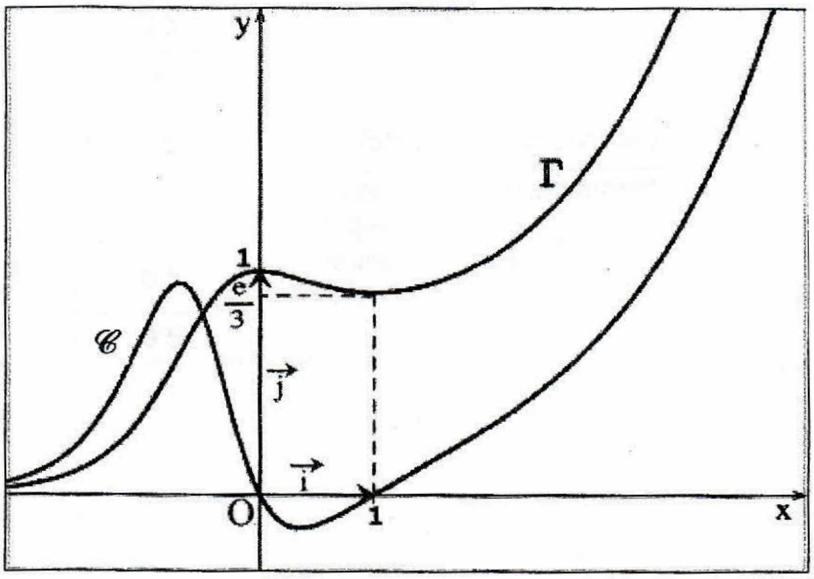
3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_{2n} > u_{2n+1}$.

b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})$.

4) Montrer que la suite (u_n) converge vers un réel α et que $u_3 < \alpha < u_2$.

Exercice N°14 Session de contrôle 2008

Dans le graphique ci-contre :
$\mathscr{C}$ et Γ sont les courbes représentatives, dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f'.
Chacune des deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ possède :
- une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.
- une asymptote d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$.



1) Par une lecture graphique :
   a) Déterminer, parmi les courbes $\mathscr{C}$ et Γ, celle qui représente la fonction f '.
   b) Déterminer f(0), f '(0) et f '(1) .
   c) Dresser le tableau de variation de f.

2) On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x+x^2}$.
   a) Calculer f '(x), pour $x \in \mathbb{R}$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) - f'(x) = f(x).\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.
   c) En déduire les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ.
   d) Montrer que pour tout $x \geq -\dfrac{1}{2}$ on a : $f(x) - f'(x) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}.\dfrac{2x+1}{1+x+x^2}$.

3) Soit t un réel supérieur ou égal à 1.
   On désigne par A(t) l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $\mathscr{C}$ et Γ et les droites d'équations : $x = -\dfrac{1}{2}$ et $x = t$.
   a) Montrer que $A(t) \geq \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln(1+t+t^2) - \dfrac{4}{3\sqrt{e}}\ln(\dfrac{3}{4})$.
   b) En déduire $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.