

liste d'exercices n°2 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :

L'espace \mathcal{E} étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, -1, 1)$; $B(3, 2, -1)$ et $C(1, \frac{1}{2}, 1)$.

1. a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés .
b) Soit le plan $P = (ABC)$.Montrer que $P : 3x - 4y - 1 = 0$.
2. Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points $M(x, y, z)$ de \mathcal{E} tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$.
a) Montrer que S_m est une sphère dont on précisera en fonction de m le rayon R_m et les coordonnées du centre I_m .
b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit \mathbb{R} .
3. a) Étudier suivant les valeurs de m la position relative de S_m et P .
b) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 :

Dans l'espace \mathcal{E} , on considère trois points non alignés O , A et B et on désigne par G le point défini par $\vec{GO} + 2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$.

1. Vérifier que $\vec{GO} = \frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB}$.
2. Soit C le point de \mathcal{E} n'appartenant pas au plan (OAB) et S l'ensemble des points M de \mathcal{E} tels que $(\vec{MO} + 2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot \vec{MC} = 0$.
a) Montrer que $M \in S$ si et seulement si $\vec{MG} \cdot \vec{MC} = 0$.
b) En déduire la nature de S .
3. Dans toute la suite, on suppose que l'espace \mathcal{E} est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On suppose aussi que les points A , B et C ont pour coordonnées $(6, 0, 0)$; $(0, 6, 0)$ et $(0, 0, 4)$.
a) Vérifier que les points O , A et B ne sont pas alignés.
b) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant : $\vec{GO} + 2\vec{GA} + 3\vec{GB} = \vec{0}$.
c) Vérifier qu'une équation cartésienne de S est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$.
d) Soit P le plan d'équation : $z = 0$. Montrer que le plan P coupe S suivant le cercle de diamètre $[OG]$.

Exercice 3 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(2, -3, -1)$, $B(1, 0, 2)$ et $C(0, 1, 3)$.

1. a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés .
b) Écrire une équation cartésienne du plan P passant par les points A , B et C
2. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on considère l'ensemble S_t des points $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2y \sin t + 2z + t^2 + \sin^2 t - 1 = 0$.
Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
3. a) Étudier suivant les valeurs de t , l'intersection de la sphère S_t et du plan P .
b) Dans le cas où le plan P est tangent à la sphère S_t , déterminer les coordonnées du point de contact.