liste d'exercices n°2 : Géométrie dans l'espace

Exercice 1 :
L'espace $\mathscr{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On considère les points $A(-1,-1,1)$; $B(3,2,-1)$ et $C(1,\frac{1}{2},1)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés .
   b) Soit le plan $P = (ABC)$ .Montrer que P :$3x - 4y - 1 = 0$.
2. Soit m un réel. On considère l'ensemble S_m des points $M(x,y,z)$ de $\mathscr{E}$ tels que $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(m+1)y + m^2 + 2m = 0$.
   a) Montrer que S_m est une sphère dont on précisera en fonction de m le rayon R_m et les coordonnées du centre I_m.
   b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m décrit $\mathbb{R}$.
3. a) Étudier suivant les valeurs de m la position relative de S_m et P.
   b) Montrer que l'intersection de S_5 et P est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 2 :
Dans l'espace $\mathscr{E}$, on considère trois points non alignés O, A et B et on désigne par G le point défini par $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.

1. Vérifier que $\overrightarrow{GO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$.
2. Soit C le point de $\mathscr{E}$ n'appartenant pas au plan (OAB) et S l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que $(\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MC} = 0$.
   a) Montrer que $M \in S$ si et seulement si $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MC} = 0$.
   b) En déduire la nature de S.
3. Dans toute la suite, on suppose que l'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
   On suppose aussi que les points A, B et C ont pour coordonnées $(6,0,0)$; $(0,6,0)$ et $(0,0,4)$.
   a) Vérifier que les points O, A et B ne sont pas alignés.
   b) Déterminer les coordonnées du point G vérifiant : $\overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
   c) Vérifier qu'une équation cartésienne de S est :$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 4z = 0$.
   d) Soit P le plan d'équation : $z = 0$. Montrer que le plan P coupe S suivant le cercle de diamètre $[OG]$.

Exercice 3 :
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
On donne les points $A(2,-3,-1)$, $B(1,0,2)$ et $C(0,1,3)$.

1. a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés .
   b) Écrire une équation cartésienne du plan P passant par les points A, B et C
2. Pour tout réel t de l'intervalle $[-\pi,\pi]$, on considère l'ensemble S_t des points $M(x,y,z)$ vérifiant l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2tx - 2ysint + 2z + t^2 + sin^2t - 1 = 0$.
   Montrer que S_t est une sphère dont on précisera le centre et le rayon.
3. a) Étudier suivant les valeurs de t, l'intersection de la sphère S_t et du plan P.
   b) Dans le cas où le plan P est tangent à la sphère S_t, déterminer les coordonnées du point de contact.