Date :février/2015 **Devoir de contrôle N°2** **Niveau:4ème info**

Nombre de pages : **2** Durée : **2h**

MATHEMATIQUES

NB : L'utilisation de la calculatrice personnelle est autorisée, cependant son échange est strictement interdit.

EXERCICE N° 1(8 pts)

On considère dans Z^2 l'équation (E) : $91x + 10y = 412$ où x et y sont des inconnues entières.

1) Justifier pourquoi (E) admet des solutions.
2) Justifier, en énonçant un théorème, qu'il existe un couple d'entiers relatifs (u ; v) tels que $91u + 10v = 1$.Trouver un tel couple.

3) En déduire une solution particulière de l'équation (E).
4) Résoudre l'équation (E).
5) Montrer que pour tout $n \in IN$, l'entier $A_n = 3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
6) Résoudre dans Z^2 l'équation : $A_3 x + A_2 y = 3296$.

EXERCICE N° 2 (12 pts)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = (1+\frac{1}{x}).\ln x$.

On note (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u} ; \vec{v})$.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x+1-\ln x$.

1) a) Calculer $g'(x)$.

b) Dresser le tableau des variations de g (on précisera $g(1)$).

2) En déduire que $g(x)>0$ pour tout x dans $]0,+\infty[$.

Partie B

1) a) Déterminer la limite de $f(x)$ puis celle de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$, et interpréter graphiquement le résultat.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+. Interpréter graphiquement.

2) a) vérifier que pour tout $x \in]\,0,+\infty\,[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) Dresser le tableau des variations de g.

c) Calculer f (1). En déduire le signe de f (x) sur $]\,0,+\infty\,[$.

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.

b) Tracer (C) et (T) .

4) Soit F la primitive de f sur $]\,0,+\infty\,[$, qui prend la valeur -1 en 1 .

a) Montrer que $F(x) = x.\ln x - x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$.

b) Dresser le tableau des variations de F sur $]\,0,+\infty\,[$.

c) Montrer que l'équation F(x) = 0 admet exactement deux solutions

α et β tel que $0 \prec \alpha \prec \frac{1}{e}$ et $1 \prec \beta \prec e$.