**Lycée Tataouine 2** Oscillations mécaniques libres et forcées **Prof : HANDOURA Naceur**

(4$^{éme}$ Sciences expérimentales)

## Exercice N°1 :

Un oscillateur électrique est constitué d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L et de résistance interne supposée nulle et un résistor de résistance R et un générateur GBF qui alimente l'ensemble par une tension sinusoïdale u(t)=10 sin (2πNt).

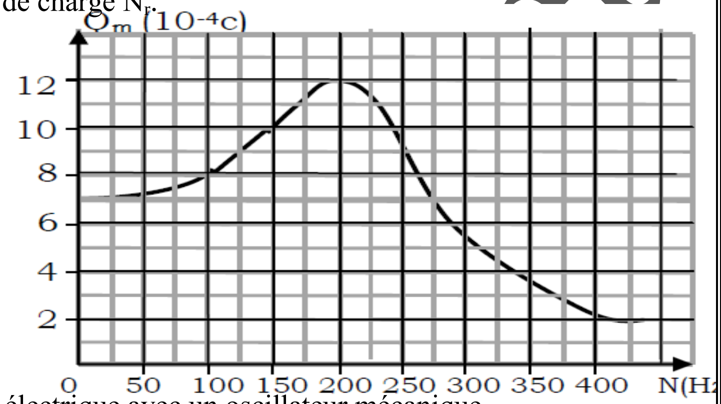
1°/ Etablir, en fonction de q et de ses dérivées première et seconde, l'équation différentielle en q(t).

2°/ On rappelle que la valeur de la charge maximale $Q_m$ est liée à la fréquence N de l'excitateur par la relation qui suit : $Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2w^2 + (Lw^2 - \frac{1}{C})^2}}$

a- Etablir l'expression de la fréquence de résonance de charge $N_r$.

b- On donne le Graphe $Q_m$=f(N) :

Déterminer à partir du graphe




- La fréquence $N_r$ de résonance de la charge de l'oscillateur.
- L'amplitude de la charge du condensateur lorsque :
  - $N=N_r$.
  - N tend vers 0.

En déduire

- La valeur de la capacité C du condensateur ainsi que la valeur de l'inductance L (On donne $N_0$= 210Hz).
- La valeur de la résistance R.

3°/ On se propose de faire un analogue de l'oscillateur électrique avec un oscillateur mécanique.

a- Faire une analogie électrique-mécanique.

b- Ecrire l'équation différentielle en x(t).

c-Ecrire l'expression de $X_m$ en fonction de $F_m$, h, m, ω et $\omega_0$.

d-Donner les expressions des pulsations qui correspondent aux résonances d'élongation et de vitesse.

## Exercice N°2 :

**Partie 1 :**

Un oscillateur mécanique est formé d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de constante de raideur k = 20N.m-1 lié à un solide (S) de masse m qui peut se déplacer sur un plan horizontal

A l'équilibre le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine o d'un repère horizontale (o, i).

On écarte le solide (S) de sa position d'une distance d = 5cm et on le lâche sans vitesse initiale à t = 0 s.

On désigne par x l'abscisse de son centre d'inertie G et v sa vitesse à l'instant t.

Les frottements sont de type visqueux et équivalent à une force f= -hv ou h est une constante positive.

1°/a- Préciser, en le justifiant, la nature des oscillations.

b- Etablir l'équation différentielle en x de cet oscillateur.

2°/ L'enregistrement mécanique du mouvement du solide (S) au cours du temps donne la figure 1

a- Donner le régime des oscillations.

b- Déterminer la durée T d'une oscillation, préciser son nom.

3°/a- Montrer que le système {(S),(R)}est non conservatif.

b- Déterminer la variation de l'énergie ΔE entre $t_0$= 0s et $t_1$= 1,5T.

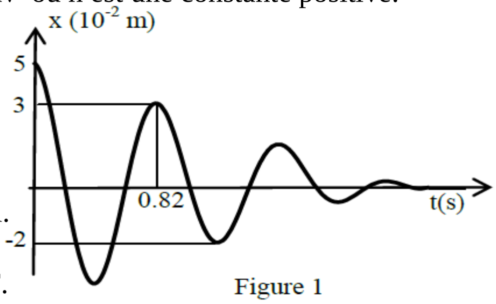


Figure 1

4°/ On suppose que les frottements sont négligeables.

a- Réécrire, alors, l'équation différentielle.

b- Déterminer l'expression de l'abscisse x du solide. On donne la fréquence propre $N_0$ = 1,25 Hz.

**Partie 2 :**

Pour entretenir les oscillations du solide (S), un dispositif approprié permet d'exercer sur l'oscillateur une force excitatrice F de fréquence variable N telle que F(t)= F(t).i avec F(t)=1,2 sin(2πNt).

1°/a- Donner, par analogie électrique mécanique, l'équation différentielle en v(t) de cette oscillateur. v(t) étant la vitesse instantanée du solide (S).

b- L'équation différentielle de l'oscillateur en v(t) admet comme solution une fonction de la forme v(t) = $V_m$sin(2πNt +$\varphi_v$). Préciser en justifiant la nature des oscillations de cet oscillateur.

2°/ Pour une valeur $N_1$ de la fréquence N, on donne les deux chronogrammes de la figures ci-dessous.
L'une correspond à F(t) et l'autre correspond à v(t).

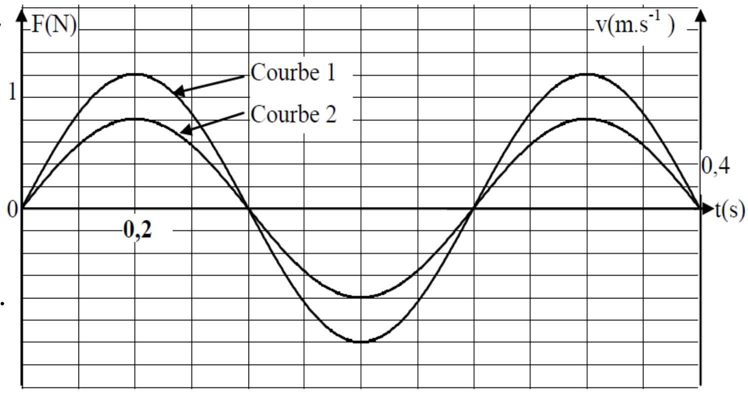
a- Justifier que la courbe 1 correspond à F(t).

b- Déterminer graphiquement :

- La fréquence $N_1$ de la force excitatrice F(t).
- L'amplitude $V_m$ de la vitesse de S.
  En déduire l'amplitude $X_m$ de l'élongation x(t).

c- Déterminer l'expression de l'élongation x(t).

d- Donner, par analogie électrique mécanique, l'expression de l'amplitude $V_m$ de la vitesse de S.




3°/a- Montrer que l'oscillateur mécanique est en état de résonance de vitesse.

b- Déduire :

- La valeur du coefficient de frottement h.
- La masse m de S. On rappelle que la constante raideur du ressort K = 20 $N.m^{-1}$.

4°/a- Montrer que l'expression de force de frottement à la fréquence $N_1$ est f(t) = 1,2 sin(2,5πt +π).

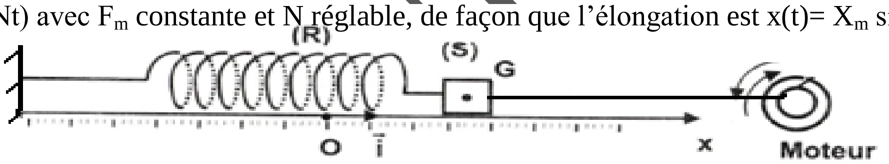
b- Tracer l'allure de la courbe de f(t).

c- Trouver, à la fréquence $N_1$, la relation entre F(t) et f(t).

d- Montrer qu'à la fréquence $N_1$, l'équation de l'oscillateur est : $m\frac{dv}{dt} + k\int v dt = 0$

## Exercice N°3 :

Un oscillateur mécanique est constitué d'un ressort (R), à spires non jointives, de masse supposée négligeable de raideur k, lié à un solide (S) supposé ponctuelle de masse m = 220g qui peut se déplacer sur un plan horizontal. A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O d'un repère (o,i).
La position du solide à un instant t donné est repérée par son abscisse x(t) dans ce repère. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux f =-hv ou h est une constante positive et est v le vecteur vitesse de G. Un dispositif approprié (moteur) permet d'exercer sur (S) une force excitatrice $F(t)=F_m \sin(2\pi Nt)$ avec $F_m$ constante et N réglable, de façon que l'élongation est $x(t)= X_m \sin(2\pi Nt+\varphi_x)$.

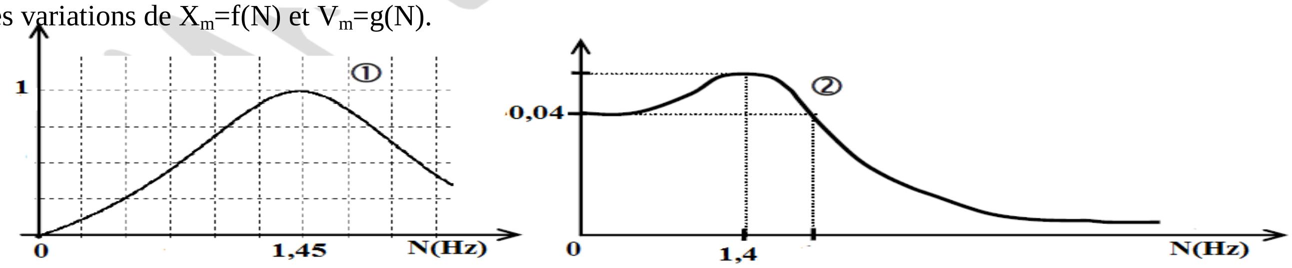



1°/ Donner, par analogie électrique mécanique, l'équation différentielle en x(t).

2°/On rappelle que l'expression de l'amplitude $X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2w^2 + (mw^2 - k)^2}}$ avec w= 2πN : pulsation de l'excitateur.

Montrer que l'amplitude $X_m$ est maximale pour la fréquence $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$ $N_0$ : Fréquence propre.

3°/On fait varier la fréquence N, on mesure chaque fois l'amplitude $X_m$ des oscillations puis on déduit l'amplitude $V_m$ de la vitesse instantanée de (S). Ce qui a permis de tracer les courbes (1) et (2) de la figure suivante traduisant les variations de $X_m$=f(N) et $V_m$=g(N).




a- Les courbes mettent en évidence deux phénomènes de résonance. Nommer ces phénomènes.

b- Préciser en le justifiant la quelle des courbes correspond à la résonance d'élongation?

c- Expliquer comment peut-on obtenir la courbe $V_m$=g(N) à partir de courbe $X_m$=f(N).

d- Relever à partir des courbes :

- La valeur de $N_0$ et en déduire la valeur de k.
- La valeur de $N_r$ et calculer celle de h. Déduire la valeur de $F_m$.

4°/ On change le liquide amortisseur ; on constate qu'on n'obtient plus le phénomène de résonance d'élongation Interpréter ce résultat. Déduire la valeur limite de coefficient de frottement $h_L$.

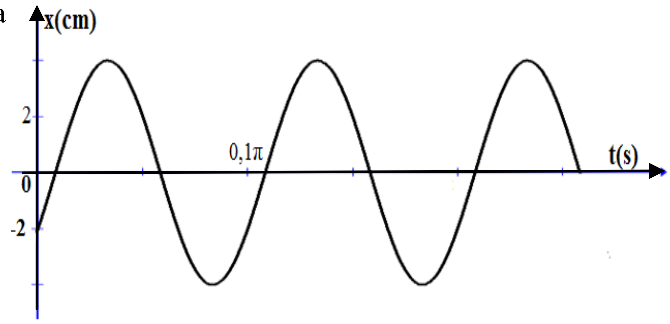
## Exercice N°4 :

Un solide (S) de masse m est attaché à un ressort (R) de raideur $k = 40\ N.m^{-1}$ et de masse négligeable.
Le solide (S), peut glisser sur un banc à coussin d'air horizontal. On désigne par x l'abscisse de G et v sa vitesse dans le repère (O,i) parallèle au banc.
A un instant $t_0 = 0$ s, on écarte le solide (C) de sa position de repos(x =0) d'une distance $x_0$, puis on le libère avec une vitesse initiale $v_0$ dans la direction parallèle à l'axe (o,i).

**I- On suppose que les frottements sont négligeables**

1°/a- Rappeler l'expression de l'énergie mécanique E du système :{(c) , (R) }en fonction de : m, k, v et x.
b- Justifier que le système (S) est conservatif, déduire l'équation différentielle, en x, des oscillations de G.

2°/ Un système approprié d'acquisition permet d'obtenir la courbe x= f(t) de la figure ci-contre :




a- Déterminer :
- L'amplitude $X_m$ et la distance $x_0$,
- La période $T_0$ des oscillations.

b- Déduire que la masse m du solide (S).
c- Déterminer :
- la valeur de l'énergie mécanique E et celle de l'énergie potentielle élastique initiale $E_{pe}(t=0)$.
- La valeur algébrique de $v_0$.
- Les expressions de x(t) et de v(t).

**II- Les frottements ne sont plus négligeables**

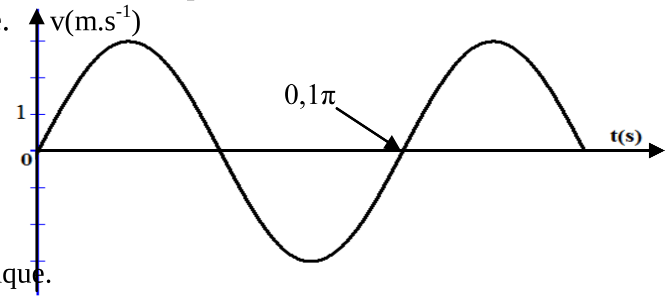
On applique au solide (S) une force de frottement de type visqueux $f=- hv$ ou h est une constante positif. On écarte le solide (S) d'une distance d= 2cm dans le sens positif de sa position d'équilibre puis on l'abandonne à lui même, le solide, y revient sans oscillations.

1°/a- Donner l'équation différentielle, en x, de cet oscillateur.
b- Préciser le type et le régime des oscillations. Représenter x(t).
2°/a- Montrer que le système n'est plus conservatif.
b- Déterminer l'énergie mécanique perdue par le système au cours de mouvement de solide.

**III-** Le solide (S) est maintenant soumis, au cours de ses oscillations, à une force excitatrice $F(t)=2{,}4\sin(2\pi Nt + \varphi_F).i$ et à une force de frottement de type visqueux $f =- hv$ avec $h = 0{,}8\ kg.s^{-1}$.
Sachant que pour un dipôle RLC série soumis à une tension alternative sinusoïdale $u(t)= U_m\sin(wt + \varphi_u)$, l'équation différentielle en i(t) est : $L\frac{di}{dt} + R_T\, i + \frac{1}{C}\int idt = u(t)$ et sa solution est $i(t)= I_m\sin(wt + \varphi_i)$

1°/a- Faire une construction de Fresnel (sans échelle) relative à l'équation différentielle en i(t) dans le cas d'un circuit capacitif. Déduire les expressions des $I_m$ et $\cos(\varphi_i - \varphi_u)$.
b- En précisant l'analogie utilisée :
- ✓ Ecrire l'équation différentielle en v(t) de l'oscillateur mécanique étudié.
- ✓ Faire la construction de Fresnel correspondante.
- ✓ Trouver les expressions des $V_m$ et $\cos(\varphi_v - \varphi_F)$.

2°/ Pour une fréquence $N_1$ de l'excitateur, le système approprié d'acquisition permet d'obtenir la courbe v= g(t) ci-contre :




a- Déterminer graphiquement la fréquence $N_1$ et l'amplitude $V_m$.
b- Déterminer le rapport $\frac{F_m}{V_m}$ donné sa signification physique.
c-En déduire que l'oscillateur est en état de résonance de vitesse.
d- Déterminer $\varphi_F$.
e-Donner l'expression de la puissance mécanique moyenne de cet oscillateur. Calculer sa valeur pour $N= N_1$

3°/ pour une valeur $N_2$ de la fréquence de l'excitateur, l'amplitude des oscillations devient maximale.
a- Donner le nom du phénomène qui a lieu dans l'oscillateur pour la fréquence $N_2$.
b- Donner, par analogie électrique mécanique, l'expression de $N_2$.
c- Comparer $N_1$ et $N_2$. Calculer $N_2$.
d- Montrer que $\cos(\varphi_v - \varphi_F)= \frac{2\pi N_2 X_m h}{F_m}$

## Exercice N°5 :

Un oscillateur mécanique est constitué :

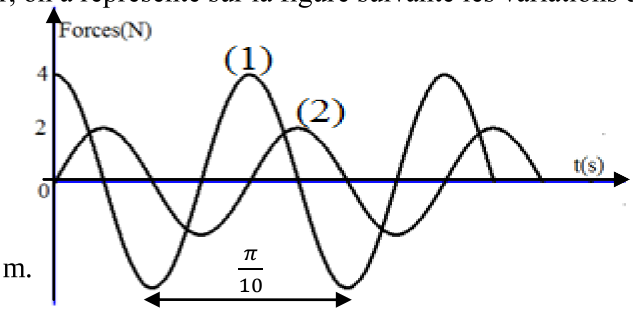
- D'un ressort (R), à spires non jointives, de masse supposée négligeable de raideur $k=40N.m^{-1}$.
- D'un solide (S) de masse m de centre d'inertie G qui peut glisser sur un banc à coussin d'air horizontal.

A l'équilibre, le centre d'inertie G du solide coïncide avec l'origine O d'un repère (o,i). La position du solide à un instant t donné est repérée par son abscisse x(t) dans ce repère. Au cours de son mouvement, le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux f =-hv ou h est une constante positive et est v le vecteur vitesse de G.

Les oscillations de (S) sont entretenues par une force excitatrice $F(t)=F_m \sin(2\pi Nt+\varphi_F).i$

**I/** Donner, par analogie électrique mécanique, l'équation différentielle en x(t).

**II/** Pour une fréquence $N=N_1$ imposé par l'excitateur, on a représenté sur la figure suivante les variations de F(t) et T(t) en fonction de temps.




1°/ Identifier les courbes (1) et (2).

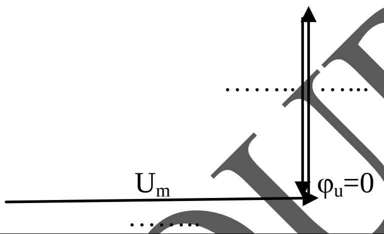
2°/ En exploitant le graphe déterminer les expressions de F(t) et T(t).

3°/a- Déduire l'expression de x(t).

b- Montrer que l'oscillateur mécanique est le siège d'une résonance de vitesse.

c- Déterminer $w_0$ et déduire la valeur de la masse m.

4°/ On donne le tableau suivant :

| | Oscillateur électrique | Oscillateur mécanique |
|---|---|---|
| Equation différentielle | $L\frac{di}{dt} + R_T\, i + \frac{1}{C}\int idt = u(t)$ | ………………………………………… |
| Construction de Fresnel (Sans échelle) | Résonance d'intensité  | Résonance de……………………… |

a- Utiliser l'analogie électrique-mécanique pour compléter le tableau.

b- Exploiter la construction de Fresnel relative à l'oscillateur mécanique pour déterminer la valeur de h.

c- En déduire la valeur de la puissance mécanique moyenne.

d- Montrer que l'énergie mécanique du système {(S),(R)} est constante pour $N=N_1$.

**III/** Pour une fréquence $N=N_2$, on constate que l'amplitude de la tension du ressort $T_m$ est maximale.

1°/ Préciser l'état de l'oscillateur mécanique.

2°/ On rappelle que l'amplitude de la vitesse est donnée par l'expression : $\mathbf{V_m}=\frac{F_m}{\sqrt{h^2+(mw-\frac{k}{w})^2}}$

a- Déterminer l'expression de l'amplitude de l'élongation $X_m$.

b- Etablir l'expression de la fréquence $N_2$ en fonction de $N_1$, h, m et en déduire la valeur limite $h_0$ du coefficient du frottement.

c- Calculer la valeur de la fréquence $N_2$.

3°/ Sur le même graphe, tracer l'allure de :

- $T_m= f(N)$ : amplitude de la tension de ressort en fonction de N.
- $f_m= f(N)$ : Amplitude de la force de frottement en fonction de N.

Préciser les valeurs particulières.