Lycée Jammel 3 A.S 2013-2014	Devoir de Contrôle n °2 Classe 4 M Durée :2h	Afli Ahmed 10-02-2014

Exercice 1:

Soit la fonction f définie sur [0,+∞[par : $\begin{cases} f(x) = x^2 \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) & si\ x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

On notera par (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1./ Soit $\varphi(x) = 2\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

a. Etudier le sens de variation de φ sur $[0,+\infty[$

b. En déduire que pour tout $x > 0$ on a $\varphi(x) > 0$.

2./a. Montrer que f est dérivable à droite en 0.

b. Montrer que pour tout $x > 0$: $f'(x) = x\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$

c. Dresser le tableau de variation de f et en déduire que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$

3./ a. Montrer que pour tout $t \geq 0$, $\ln(1+t) \leq t$.

b. Etudier la position de (C_f) et la droite $(D): y = x$.

4./ a. Vérifier que pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a : $1 - t \leq \frac{1}{1+t} \leq 1 - t + t^2$

b. En déduire que pour tout $t \in [0,+\infty[$, on a : $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$

c. En déduire que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2}$

5./a. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$ .Interpreter le resultat géometriquement.

b. Etudier la position de (C_f) et la droite $\Delta: y = x - \frac{1}{2}$

c. Tracer dans le même repère (C_f) et $(C_{f^{-1}})$

6./a. Soit $\lambda \in]0,1]$ et A_λ : l'aire de la région du plan limitée par (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \lambda$ et $x = 1$. Calculer A_λ et $\lim_{x\to 0^+} A_\lambda$

b. En déduire l'aire de la partie du plan limitée par $(C_{f^{-1}})$, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $y = 1$

Exercice 2:

Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$ *par* $F(x) = \int_1^{tg^2x} \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$

1./a. Justifier l'existence de F sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$

b. Montrer que F est paire.

c. Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2./a. Montrer F est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *et calculer F ' (x)*

b. Déduire que $\forall\ x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ *,* $F(x) = 2x - \frac{\pi}{2}$

c. Expliciter F(x) pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2};0\right[$

3./a. Calculer alors $I = \int_1^3 \frac{dt}{\sqrt{t}(1+t)}$

b. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_1^3 \frac{\sqrt{t}}{(1+t)^2}dt$

Exercice 3:

Soit ABCD un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ *. les points I et J sont respectivement les milieux des segments [AB] et [AD]*

1./a. Montrer qu'il existe une unique similitude directe f qui transforme D en O et C en I .

b. Déterminer le rapport et l'angle de f.

c. Construire son centre Ω

2./a. Déterminer les images des droites (BD) et (BC) par f. En déduire que : f(B) = A

b. Montrer que f(A) = J.

c. Déterminer $(f \circ f)(B)$ *.En deduire que* $\overrightarrow{\Omega B} + 4\overrightarrow{\Omega J} = \vec{0}$

3./Soit g la similitude indirecte qui transforme D en O et C en I. et soit $S_{(OI)}$ *la symetrie orthogonale d'axe (OI)*

a. Vérifier que $g = S_{(OI)} \circ f$

b. Déterminer g(B)

c. Déterminer les éléments caractéristiques de g.

4./ On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$

Déterminer l'expression complexe de g.