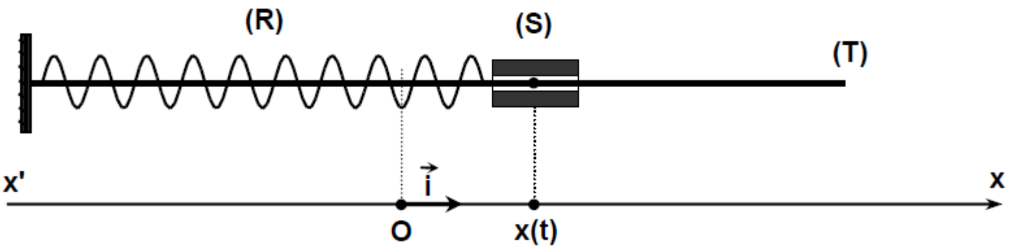
Série n° 13
Oscillations mécaniques libres

Exercice n° 1 : *(Bac 2011 – 4ème Techniques – Session de contrôle)*

Un pendule élastique est constitué d'un solide (**S**) de masse **m** pouvant coulisser, sans frottement, sur une tige horizontale (**T**). Le solide (**S**) est attaché à un ressort, à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur **k**. La position du centre d'inertie **G** de (**S**) est repérée par son abscisse **x(t)** sur un axe horizontal (**x'Ox**). L'origine **O** des abscisses est confondue avec la position de **G** lorsque (**S**) est à l'équilibre.

Écarté de sa position d'équilibre, puis abandonné à un instant de date **t = 0 s**, le solide (**S**) se met à osciller de part et d'autre du point **O**. À un instant de date **t**, le système est représenté comme l'indique la **figure 1**.

Figure 1



1) **a)** Représenter sur la **figure 1** les forces extérieures exercées sur (**S**) à l'instant de date **t**.
b) Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de l'abscisse **x(t)** du centre d'inertie **G**. En déduire la nature de son mouvement.

2) À l'aide d'un dispositif approprié, on enregistre l'évolution de l'abscisse **x(t)** et celle de la vitesse **v(t)** de **G**. On obtient les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de la **figure 2**.

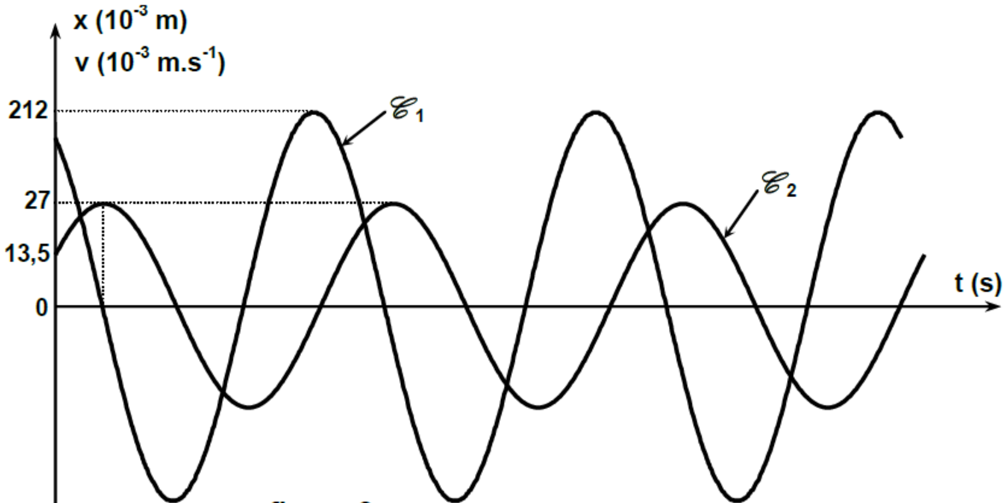


figure 2

a) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_1$ correspond à **v(t)**.
b) À partir des courbes, déterminer les amplitudes respectives X_{max} et V_{max} de **x(t)** et de **v(t)**. En déduire la valeur de pulsation propre ω_0.
c) Déterminer la phase initiale φ_x de **x(t)**.

3) L'énergie totale **E** du système {ressort + solide} est constante : $\mathbf{E = 3,645.10^{-3}\ J}$.

a) Donner l'expression de **E** en fonction de **k** et $\mathbf{X_{max}}$.

b) En déduire les valeurs de **k** et **m**.

Exercice n° 2 :

Un solide (**S**) de masse **m** est soudé à l'extrémité d'un ressort (**R**) à spires non jointives de raideur **k**. Il peut glisser sans frottement sur un plan horizontal. Son centre d'inertie **G** est repéré sur un axe horizontal (**x'Ox**) dont l'origine **O** correspond à la position de repos de (**S**).

Le ressort est allongé à une abscisse $\mathbf{x_0}$ et lâché à l'instant $\mathbf{t_0}$. Un dispositif permet d'enregistrer la variation de l'abscisse **x** en fonction du temps. L'enregistrement est donné par la figure -1-.

1) Déterminer à partir du graphe la période $\mathbf{T_0}$ et la pulsation $\mathbf{\omega_0}$ du mouvement.

2) a) Établir l'équation différentielle du mouvement du solide. En déduire une relation entre $\mathbf{\omega_0}$, **m** et **k**.

b) Établir l'équation horaire du mouvement de (**S**).

3) a) Établir l'expression de l'énergie potentielle élastique du système {(**S**) ; (**R**)} en fonction de **t**.

b) Sachant que cette valeur à l'instant **t = 0 s** est égale à $\mathbf{6,25.10^{-4}\ J}$,

i. Déterminer la valeur de **k**.

ii. Quelle est donc la valeur de la masse **m** ?

4) On se propose d'augmenter la période propre $\mathbf{T_0}$ de l'oscillateur tout en conservant **k** et $\mathbf{X_m}$. Pour cela on remplace la masse de solide (**S**) par **M** > **m**. On donne la courbe exprimant la variation de l'énergie potentielle élastique du système {(**S**) ; (**R**)} en fonction de **t** par la figure -2-.

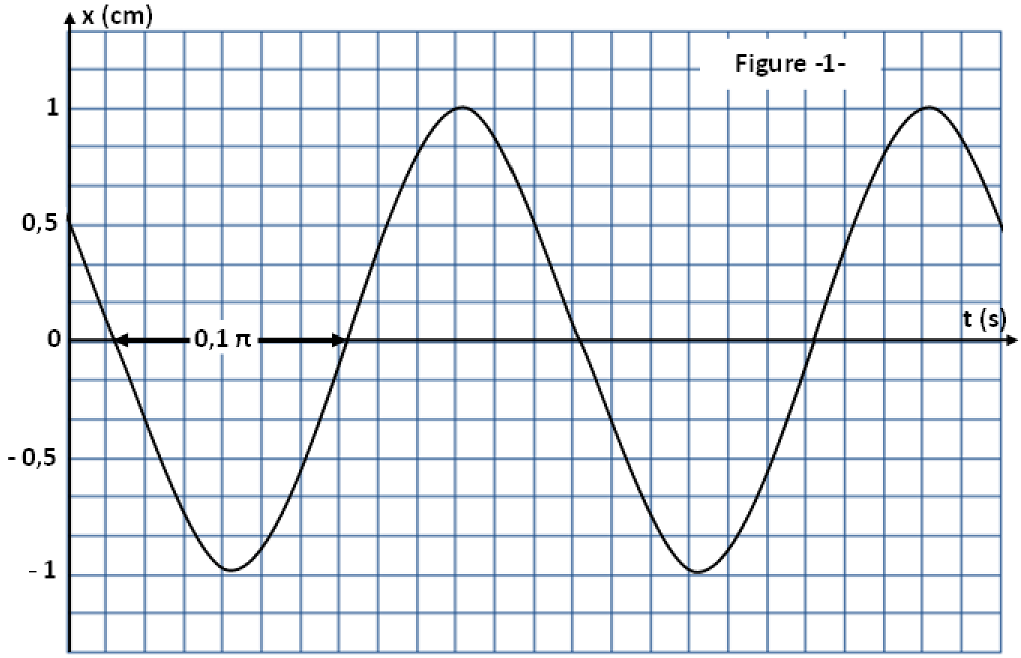
a) Déterminer la nouvelle période propre du système oscillateur $\mathbf{T_0'}$.

b) En déduire la masse **M**.

c) Calculer **φ** : la phase initiale de l'énergie potentielle élastique.

d) Donner la nouvelle loi horaire du mouvement.

e) Représenter sur la même figure la courbe de l'énergie cinétique du système.



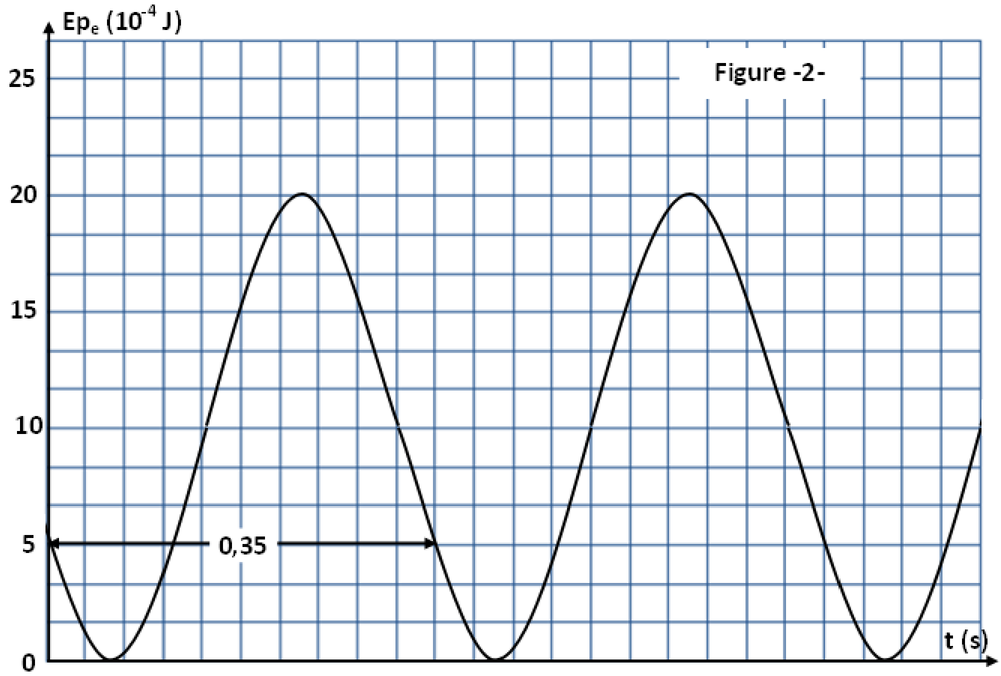
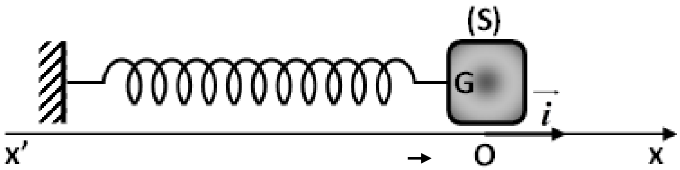


Figure -2-

Exercice n° 3 :



On étudie les oscillations mécaniques d'un pendule élastique horizontal en supposant tout type de frottement négligeable.

On désigne par **x(t)** l'élongation du centre d'inertie **G** du solide dans le repère **$(O, \vec{i})$** où **O** est la position de **G** à l'équilibre.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation **x(t)**.

2) La solution de cette équation différentielle est : $x(t) = X_m.\sin(\omega_0.t + \varphi_x)$. En vérifiant cette solution, établir l'expression de la période propre T_0 des oscillations libres du pendule en fonction de la masse **m** du solide et de la raideur **k** du ressort.

3) Dans une première expérience et à l'aide d'un système approprié on enregistre pendant une durée $\Delta t = 1,25$ **s** le mouvement du centre d'inertie **G** d'un solide (S_1) de masse m_1.On obtient le diagramme de la figure -1- ci-contre.

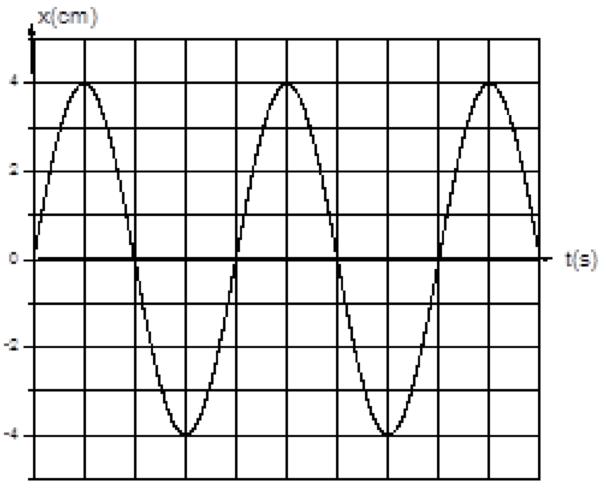


Figure -1-

a) Déduire la période T_0 des oscillations.

b) Calculer :

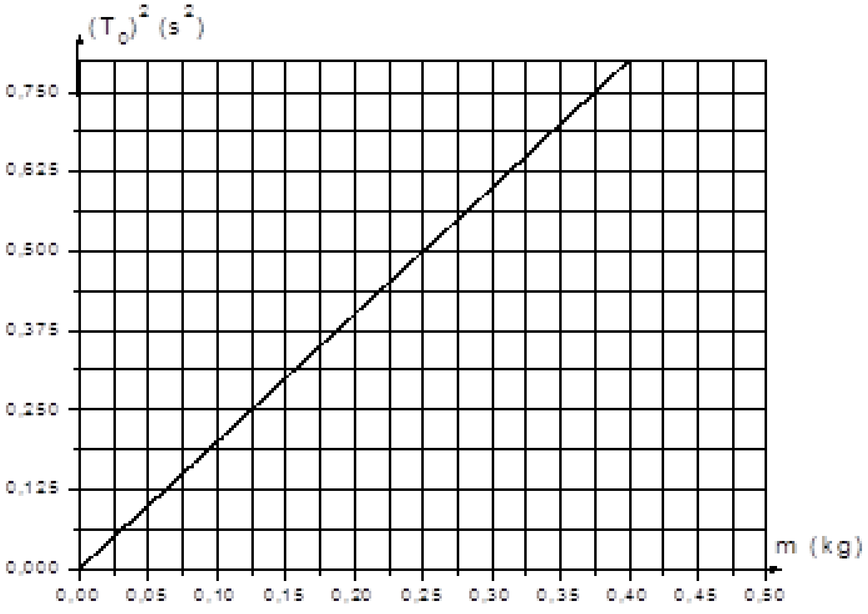
i. La phase initiale φ_x du mouvement.

ii. La vitesse initiale V_0 à la date **t = 0 s**.

c) Sous qu'elle forme se présente l'énergie mécanique du système {solide + ressort} à la date **t = 0 s** ? Justifier la réponse.

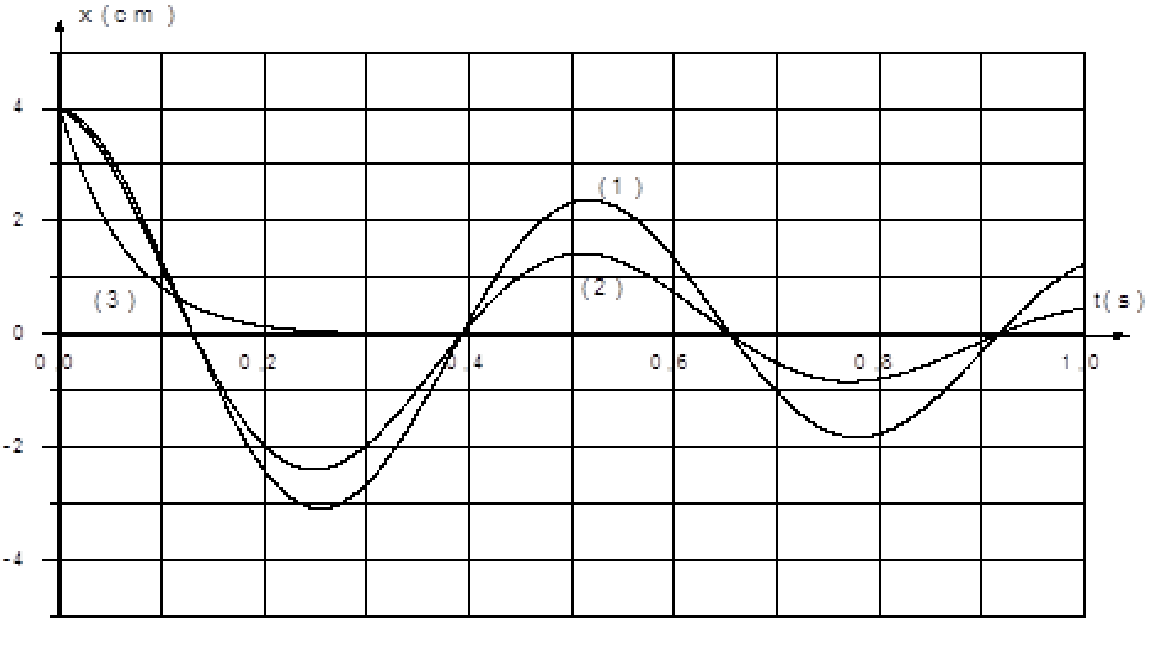
4) Dans une deuxième expérience on étudie l'influence de la masse du solide sur la période T_0 des oscillations. Pour différentes valeurs de la masse **m** on mesure la période T_0. Cette étude a permis de tracer la courbe de la figure -2- représentant $T_0^2 = f(m)$.

a) Déduire de la courbe de la figure -2- la masse $\mathbf{m_1}$ du solide utilisé lors de la première expérience.
b) Calculer la raideur **k** du ressort.
c) Calculer l'énergie mécanique fournie initialement (à **t = 0**) au système {($\mathbf{S_1}$) + ressort}.
d) Calculer les abscisses des positions du centre d'inertie **G** de ($\mathbf{S_1}$) pour lesquelles l'énergie cinétique et l'énergie potentielle sont égales.



5) Dans une troisième expérience et à l'aide d'un dispositif d'amortissement approprié on applique sur le solide de masse $\mathbf{m_1}$ une force de frottement visqueux $\vec{\mathbf{f}} = -\mathbf{h}\,\vec{\mathbf{V}}$ où **h** est un coefficient d'amortissement positif et $\vec{\mathbf{V}}$ le vecteur vitesse instantanée du solide.
Dans ces conditions l'équation différentielle reliant l'élongation **x(t)** à ses dérivées première et seconde par rapport au temps s'écrit : $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + 12\dfrac{dx(t)}{dt} + 160\,x(t) = 0$.

a) Déduire de cette équation la valeur du coefficient de frottement **h**.
b) Montrer que le système {($\mathbf{S_1}$) + ressort} n'est pas conservatif.
c) Les diagrammes ci-dessous sont des enregistrements de l'évolution temporelle de l'élongation **x(t)** du centre d'inertie du solide pour différentes valeurs du coefficient d'amortissement **h** ($\mathbf{h_a = 1{,}5\ kg.s^{-1}}$; $\mathbf{h_b = 1{,}8\ kg.s^{-1}}$ et $\mathbf{h_c = 3\ kg.s^{-1}}$).



Attribuer à chacun des enregistrements (**1**), (**2**) et (**3**) le coefficient d'amortissement correspondant parmi les valeurs $\mathbf{h_a}$, $\mathbf{h_b}$ et $\mathbf{h_c}$, et préciser pour chacun le nom du régime correspondant.