Exercice N°1

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .on considère les points A (3,-1,0) ; B(5,-1,1)

C(3,0,1) et D(-2,1,0)

1) a) Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire que A , B et C ne sont pas alignés .

c) Montrer qu'une équation du plan P passant par A , B et C est : $-x - 2y + 2z + 1 = 0$.

2) Calculer l'aire du triangle ABC

3) a) Montrer que les points A , B , C et D ne sont pas coplanaires .

b) Calculer le volume du tétraèdre ABCD

c) Calculer l'aire du triangle BCD

d) En déduire la distance du point A au plan BCD

4) Soit le plan Q : $2x - y - 1 = 0$

a) Montrer que $P \perp Q$

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta = P \cap Q$

Exercice N°2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.on considère les points A (-1,1,0) ; B(1,0,1)

C(0,2,-1) et D(-1,3,2)

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (ABC)
3) Calculer Le volume V du tétraèdre DABC
4) Soit I , J et K les milieux respectifs de [DA] , [DB] et [DC] . On considère le plan Q passant par I et parallèle Au plan (ABC)
   a) Donner une équation cartésienne du plan Q
   b) Vérifier que J et K appartiennent à Q
   c) On désigne par V' le volume du tétraèdre DIJK . Montrer que $V = 8V'$

Exercice N°3

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.on considère les points A(0,1,2) ; B(2,0,3) ; C(-1,0,0) et I (1,2,1)

1) a) Vérifier que les points A , B et C ne sont pas alignés .

b) On désigne par P le plan (ABC) . Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $x + y - z + 1 = 0$

2) Soit la sphère (S) dont une équation cartésienne est : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 2z + 3 = 0$

a) Montrer que (S) a pour centre le point I et déterminer son rayon .

b) Montrer que le plan P est tangent à (S) au point A .

c) Calculer le volume du tétraèdre IABC .

3) Soit H le milieu du segment [IA] et Q le plan passant par H et parallèle à P

a) Montrer que le plan Q et la sphère (S) sont sécants en un cercle (C)

b) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) .

Exercice N°4

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.on considère les points A (-1,1,0) ; B(1,0,1)

C(0,2,-1) et D(-1,3,2)

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A
2) Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AD}$ est normal au plan (ABC)
3) Calculer Le volume V du tétraèdre DABC
4) Soit I , J et K les milieux respectifs de [DA] , [DB] et [DC] . On considère le plan Q passant par I et parallèle Au plan (ABC)
   a) Donner une équation cartésienne du plan Q
   b) Vérifier que J et K appartiennent à Q
   c) On désigne par V' le volume du tétraèdre DIJK . Montrer que $V = 8V'$

Exercice N°5

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soient les points A(1,1,-1) ;B(0,1,1) et C(1,0,-3)

1) a – Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b – En déduire que les points A , B et C définissent un plan P .
   c – Montrer que le plan a pour équation cartésienne : $2x - 2y + z + 1 = 0$
2) Soit S_m l'ensemble des points M (x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - m^2 = 0$.
   a - Montrer que pour tout réel m , S_m est une sphère de centre I (1, 2 , -2) et de rayon R_m que l'on déterminera .
   b – Montrer que pour tout reel m , S_m et P sont sécants .
3) On prend m = 4 , Determiner $S_4 \cap P$.
4) A – Ecrire une équation paramétrique de la droite D passant par I et perpendiculaire à P .
   B – Pour m = 0 , déterminer l'intersection de D et la sphère S_0
5) A – Calculer le volume de tétraèdre IABC .
   B - déterminer les points M de D pour que le volume du tétraèdre MABC soit égale à $\frac{5}{2}$.

Exercice N°6

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.Soient les points A(1,0,-1) ; B(1,3,5) ; C(-7,2,2)

Et H(-1,4,3) .

1) A- Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{HB} \wedge \overrightarrow{HC}$.
   b- En déduire qu'une équation du plan (HBC) est : $x - 2y - 2z + 15 = 0$
   c- Montrer que le point H est le projeté orthogonal de A sur le plan (HBC)
2) On considère l'ensemble S des points M(x,y,z) de l'espace tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 1 = 0$
   a- Montrer que S est une sphère et préciser son centre I et son rayon R .
   b- Verifier que I est le milieu du segment [AH] .
   c- Déterminer la position relative de la sphère S et du plan (HBC)
3) Soit J(0,0,1)
   a- Verifier que J appartient à S
   b- Calculer la distance du point I à la droite (AJ)
   c- En déduire que la droite (AJ) est tangent à S .
   d- Donner une représentation paramétrique de la droite (AJ) et déterminer les coordonnées du Point d'intersection de (AJ) et du plan (HBC).

Exercice N°7

Soient a > 0 et OABC un tétraèdre tq : OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O. OA = OB = OC = a.
On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H pied de la hauteur issue de O du triangle OIC, et D le point de l'espace définie par $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC.
2) a) Montrer que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.
   b) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC .Calcul de OH :
   c) Calculer le volume V du tétraèdre OABC puis l'aire S du triangle ABC.
   d) Exprimer OH en fonction de V et de S. Déduire que $OH = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.
3) L'espace est rapporté à un RON : $\left(O; \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.
   a) Démontrer que H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$.
   b) Démontrer que le tétraèdre ABCD est régulier.
   c) Soit I le centre de la sphère circonscrit au tétraèdre ABCD. Démontrer que I est un point de la droite (OH), puis calculer ses coordonnées

Exercice N°8

Exercice N°9

Exercice N°10

Exercice N°11