Lycée Houmet Souk 1 Prof : Loukil Mohamed	Devoir de Synthèse N : 1 Durée : 2 Heures	4 Technique 5 10 - 12 - 2014

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , indiquer la seule réponse correcte .

1) Soit $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x-2}}$ sachant que f est une bijection de $]\,2\,;+\infty\,[$ sur $]\,1\,;+\infty\,[$ alors :

a) $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-1}$ **b)** $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{1-x^2}$ **c)** $f^{-1}(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}$

2) Les racines quatrièmes de $(16\,i)$ sont :

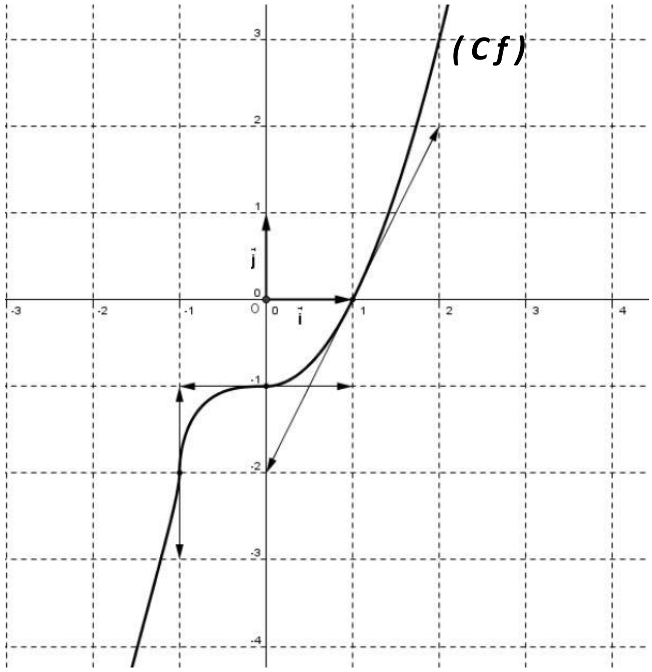
a) $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\}\end{cases}$ **b)** $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\}\end{cases}$ **c)** $\begin{cases} Z_k=2e^{i\left(\frac{\pi+k}{8}\right)} \\ k\in\{1,2,3,4\}\end{cases}$

3) Z_1 et Z_2 sont deux nombres complexes **inverses** vérifiant : $Z_1+Z_2=1+2i$.

Z_1 et Z_2 sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation :

a) $Z^2-(1+2i)Z-1=0$ **b)** $Z^2-(1+2i)Z+1=0$ **c)** $Z^2+(1+2i)Z+1=0$

EXERCICE N : 2 (3.5 points)



1) Justifier que f est une bijection de IR sur un intervalle J que l'on précisera .

2) En utilisant le graphique déterminer :

a) Le domaine de dérivabilité de f^{-1}.

b) Déterminer : $f'(1)$; $f''(0)$; $(f^{-1})'(0)$

$(f^{-1})'(-2)$; $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{f(x)+2}{x+1}$ et $\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{f^{-1}(x)}{x+1}$.

EXERCICE N : 3 (6 points)

A) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : **(E)** $2Z^2-(\sqrt{3}+1)(1+i)Z+2i=0$.

1) Vérifier que : $[(\sqrt{3}+1)(1+i)]^2-16i=[(\sqrt{3}-1)(1-i)]^2$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation **(E)** .

B) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

On considère les points A et B d'affixes respectives : $\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\boldsymbol{b}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$.

1) a) Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexe **a** et **b** .

b) Vérifier que : $\boldsymbol{b}^2=\boldsymbol{a}$.

c) Déduire les racines carrées du nombre complexes **a** .

2) Soit C le point d'affixe $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

a) Placer les points A , B et C

b) Vérifier que : $\mathbf{c} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$.

3) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation : **(E ')** $Z^2 + Z - \mathbf{c} = 0$.

a) Vérifier que $\mathbf{b}$ est une solution de **(E ')** .

b) On désigne par $\mathbf{d}$ l'autre solution de **(E ')** . Prouver que : $\mathbf{d} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\, e^{-i\frac{11\pi}{12}}$.

c) Placer le point D d'affixe $\mathbf{d}$.

<u>EXERCICE N : 4</u> (7.5 points)

A) Soit la fonction f définie sur $[\, 1\, ; +\infty\, [$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x} + 1$.

On désigne par **(Cf)** sa courbe représentative dans le repère orthonormé $R\,(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) Prouver que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 1 . (Interpréter graphiquement le résultat obtenu) .

b) Justifier que f est dérivable sur $]\, 1\, ; +\infty\, [$ et que $f'(x) = \dfrac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

c) Dresser le tableau de variations de f .

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $[\, 1\, ; +\infty\, [$ sur $[\, 1\, ; 2\, [$.

b) Justifier que f^{-1} est dérivable à droite de 1 .

4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in [\, 1\, ; 2\, [$.

B) Soit la fonction g définie sur $[\, 0 , \frac{\pi}{2}\,]$ par : $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ et $g(x) = \dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)}$ si $x \in [\, 0 , \frac{\pi}{2}\, [$.

1) Montrer que pour tout $x \in [\, 0 , \frac{\pi}{2}\,]$; $g(x) = \dfrac{1}{1 + \sin x}$.

2) Justifier que g admet une réciproque g^{-1} définie sur $[\, \frac{1}{2} , 1\,]$.

3) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]\, \frac{1}{2} , 1\,]$ et que $(g^{-1})'(x) = -\dfrac{1}{x\sqrt{2x-1}}$.