LYCEE SAID BOU BAKKER MOKNINE PROF: SALAH HANNACHI 4EMETECHNIQUE «3»	2013/2014 **DEVOIR DE SYNTHESE N1** *MATHEMATIQUES*	2 heures

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

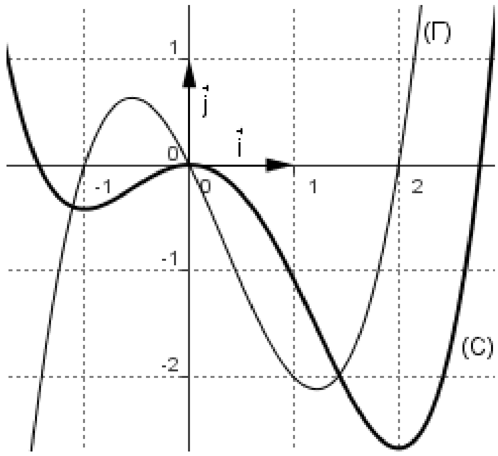
1) Le nombre complexe $(ie^{i\frac{\pi}{10}})$ est une racine carrée de :

a) $e^{i\frac{6\pi}{5}}$ b) $e^{i\frac{\pi}{5}}$ c) $e^{i\frac{3\pi}{10}}$

2) Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3 - 3x + 1$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (C) admet :

a) aucun point d'inflexion b) un seul point d'inflexion c) deux points d'inflexion

3) Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dans le graphique ci-contre, (C) et (Γ) représentent respectivement deux fonctions f et g définies et dérivables sur IR. Alors :



a) f est la dérivée de g
b) g est la dérivée de f
c) $g(x)= f(x+1)+ \frac{3}{4}$ pour tout $x\in$IR

4) Soit la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ et la fonction $g : x \longmapsto \tan x$. Alors pour tout $x\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a : $(f\circ g)'(x)=$

a) $\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}}$ b) $\frac{1}{2\sqrt{1+\tan^2 x}}$ c) $\frac{1+\tan^2 x}{2\sqrt{x}}$

EXERCICE 2 : (6 points)

A/ 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 4\sqrt{2}.z + 16 = 0$. Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.

2) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $z^4 - 4\sqrt{2}.z^2 + 16 = 0$ sous la forme exponentielle.

■ Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

3) On donne les points $A(2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $B(-2e^{i\frac{\pi}{8}})$, $C(2e^{-i\frac{\pi}{8}})$ et $D(-2e^{-i\frac{\pi}{8}})$.

Montrer que le quadrilatère ACBD est un rectangle et que son aire $\mathcal{A}=4\sqrt{2}$

B/ On considère l'équation (E_θ) : $i.z^2 + (2\sin\theta).z - i = 0$; où $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

1) Montrer que $z_1 = e^{i\theta}$ est une solution de (E_θ). En déduire l'autre solution z_2 de (E_θ).

2) On donne les points M_1 et M_2 d'affixes respectifs $e^{i\theta}$ et $(-e^{-i\theta})$

a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}}) \equiv \pi - 2\theta [2\pi]$

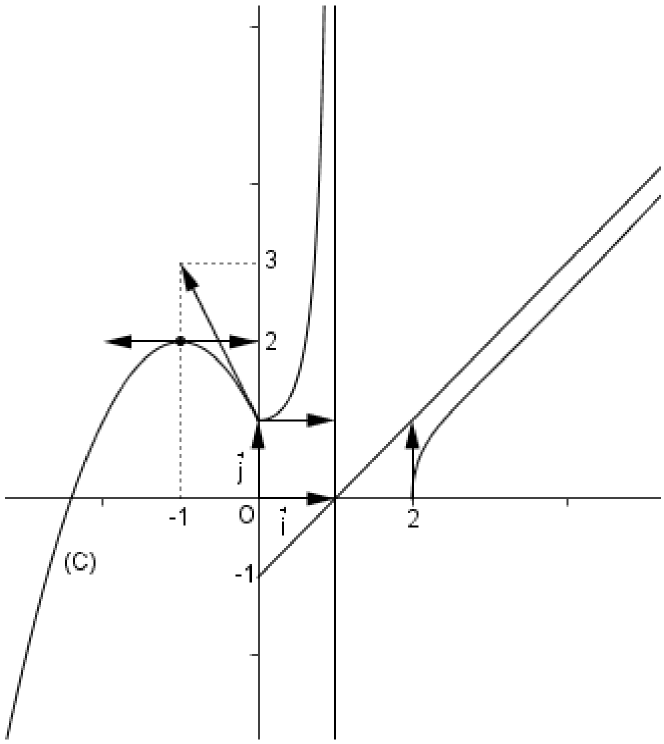
b) Déterminer la valeur de θ dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ pour laquelle le triangle OM_1M_2 soit équilatéral.

Formulaire : $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$ et $\sin 2\theta = 2\sin\theta.\cos\theta$

Voir suite au verso

EXERCICE 3 : (4 points)

Dans le graphique suivant on a tracé selon un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative (C) d'une fonction f définie sur $]-\infty,1[\cup[2,+\infty[$. La droite $\Delta : y=x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$. La courbe (C) admet au voisinage de $(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$. La droite D : x=1 est une asymptote à (C). Les flèches représentent des vecteurs directeurs des demi-tangentes à (C).



1) a) Déterminer : $f'(-1)$; $f'_d(0)$; $f'_g(0)$ et $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{x-2}$

b) Déterminer les intervalles sur lesquels f est dérivable.

2) Déterminer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$;

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$

3) Dresser le tableau de variation de la fonction f (on demande les signes de $f'(x)$).

4) Soit g la fonction définie par : $g(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}f(x)\right)$

Sachant que $f(x)=-x^2-2x+1$ pour tout $x\in\,]-\infty,0]$.

Montrer que g est dérivable en (-2) et calculer $g'(-2)$.

EXERCICE 4 : (7 points)

On considère la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x)=-1+\sqrt{x^2-1}$.

On désigne par (C) sa courbe représentative selon un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]1,+\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Montrer que la courbe (C) admet au voisinage de $(+\infty)$ une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation cartésienne.

3) Montrer que l'équation $f(x)=-x^2+2x$ admet une unique solution α dans $[1,+\infty[$.

Vérifier que $1<\alpha<2$

4) Soit la fonction $h : x\longmapsto\frac{1}{\cos x}$ et la fonction g définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f(h(x))$

a) Montrer que h est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$ pour tout réel x de $]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) Etablir le tableau de variation de la fonction h.

c) Montrer que la fonction g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et que $g'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ pour tout réel x de $]0,\frac{\pi}{2}[$.

Bon travail