

Le sujet comporte quatre exercices répartis en deux pages

EXERCICE 1 : (3 points)

Pour chacune des propositions suivantes, une seule des trois réponses est exacte. Indiquez sur votre copie le numéro et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Soit le nombre complexe $z = -2.e^{i\frac{\pi}{3}}$, Alors :

a) $\arg(z) \equiv \frac{4\pi}{3} [2\pi]$

b) $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

c) $\arg(z) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

2) Le nombre complexe $(e^{i\frac{\pi}{4}})^3$ est égale à :

a) $i.e^{i\frac{\pi}{4}}$

b) $3.e^{i\frac{3\pi}{4}}$

c) $3.e^{i\frac{\pi}{4}}$

3) La limite de la fonction $f : x \mapsto \frac{\sin(3x^2)}{x}$ en 0 :

a) 0

b) 1

c) 3

4) L'équation $\sqrt{x-1} - x^3 + x + 3 = 0$ admet une solution α dans l'intervalle :

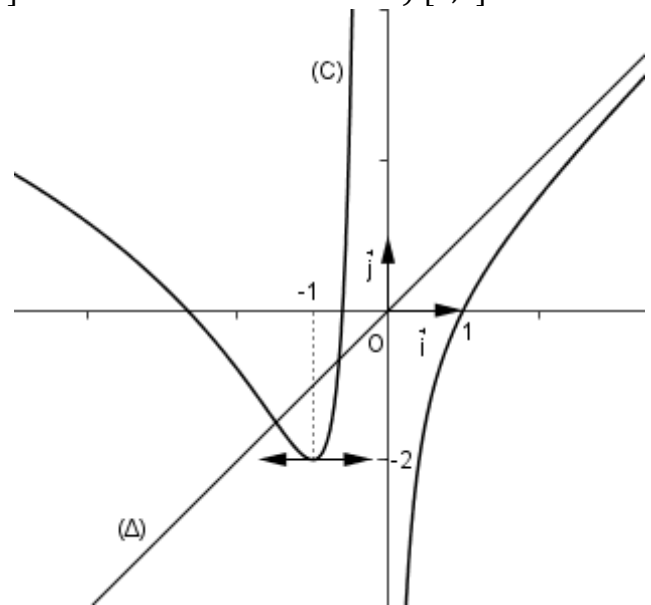
a) [1,2]

b) [2,3]

c) [3,4]

EXERCICE 2 : (5 points)

(O, \vec{i}, \vec{j}) étant un repère orthonormé du plan, la courbe (C) ci-contre représente une fonction f définie sur \mathbb{R}^* , les droites $(\Delta) : y=x$ et l'axe (O, \vec{j}) sont des asymptotes à (C). La courbe (C) admet au $v(-\infty)$ une branche parabolique de direction celle de (O, \vec{i}) .



1) Dresser le tableau de variation de f . (On demande les limites aux bornes et le signe de $f'(x)$)

2) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(\frac{1}{x})$; $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^+} f(\tan x)$

3) Déterminer le nombre de solutions dans \mathbb{R}^* de chacune des équations suivantes : $f(x)=0$ et $f(x)=x$

4) Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x-2\cos(\pi x)}{x-2} & \text{si } x \leq 1 \\ g(x) = \frac{6(2-\sqrt{x^2+3})}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

On note h la fonction définie par : $h=g \circ f$

a) Montrer que $\frac{x+2}{x-2} \leq g(x) \leq 1$ pour tout $x \leq 1$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$. Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)$

c) Montrer que la fonction g est continue en 1.

d) Montrer que la fonction h est continue sur $]0, +\infty[$.

EXERCICE 3 : (5 points)

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$; $x \in]1, +\infty[$

On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1) Etudier les branches infinies de (C).

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]1, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}$ pour tout $x \in]1, +\infty[$.

b) Etablir le tableau de variation de f.

3) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = f(x) + x$

a) Montrer que $g(]1, +\infty[) = \mathbb{R}$

b) En déduire que l'équation $f(x) = -x$ admet une unique solution α dans $]1, +\infty[$.

c) Vérifier que $1,1 < \alpha < 1,2$.

EXERCICE 4 : (7 points)

Le plan complexe P étant muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On note A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $1-2i$.

À tout nombre complexe $z \neq 1$ on associe : $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$

1) Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que : z' soit réel.

2) a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a : $(z'-1)(z-1) = 2i$

b) En déduire que pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \times AM' = 2$$

c) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre A et passant par O, alors M' appartient à un cercle (C') que l'on précisera.

3) a) Montrer que pour tout point M distinct de A, on a :

$$(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

b) En déduire que si M appartient à la perpendiculaire à (O, \vec{u}) passant par A, alors M' appartient à une droite que l'on précisera.

4) On pose $z = 2.e^{i2\theta} + 1$; $\theta \in [-\pi, \pi]$

a) Montrer que $z' = 2.\cos(\theta - \frac{\pi}{4}).e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$

b) En déduire les valeurs de θ pour lesquelles le point M' appartient à l'axe des abscisses (O, \vec{u}) .

Bon travail

