

Série d'exercices (bac sc-exp)(nombres complexes)

Exercice n°1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé directe (O, \vec{U}, \vec{V})

On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives $z_A=2, z_B=\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$,

$z_C=1+i$ et $z_D=-2i$

1) Placer les points A, B, C et D dans le repère (O, \vec{U}, \vec{V}) .

2) Ecrire z_A, z_C et z_D sous forme trigonométrique.

3) Déterminer les ensembles suivantes $E=\{M(z) \in P / |z - 2| = |z + 2i|\}$

et $F=\{M(z) \in P / |iz + 1 - i| = 2\}$

4) Montrer que le triangle ABD est rectangle en A.

5) Déterminer l'affixe du point E tel que ABED soit un rectangle .

6) Calculer l'aire du rectangle ABED

Exercice n°2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé directe (O, \vec{U}, \vec{V}) .

On considère les points A et B d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$

A tout point M d'affixe z ($z \neq i\sqrt{3}$) on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-i}{z-i\sqrt{3}}$

1) Dans cette question on prend $z=1$

a) Donner la forme trigonométrique puis la forme cartésienne de z' .

b) En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

2) Déterminer l'ensemble E des points M tel que $|z'|=1$

3) On suppose que $z \neq i$ et $z \neq i\sqrt{3}$

a) Montrer que $(\vec{U}; \overrightarrow{OM'}) \equiv (\overrightarrow{BM}; \overrightarrow{AM}) [2\pi]$

b) En déduire l'ensemble F des points M tel que z' est un réel strictement positif.

Série d'exercices (bac sc-exp)(nombres complexes)

Exercice n°3

Soit $\alpha \in [0; \pi]$, on considère dans le plan complexe les points A, B, et C d'affixes respectives : $z_1 = 1$, $z_2 = -\sin\alpha + i\cos\alpha$ et $z_3 = -\sin\alpha - i\cos\alpha$

1) Déterminer le module et un argument de z_1 , z_2 et z_3 .

2) Montrer que $|z_2 - 1| = |z_1 - 1|$

3) Donner en fonction de α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

Exercice n°4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{U}, \vec{V}) . Soit A(-i) et B(i).

Soit l'application $f : P \setminus \{A\} \rightarrow P; M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = \frac{z-i}{z+i}$

1) Déterminer l'ensemble des points M(z) tel que z' est réel

2) Déterminer l'affixe des points M(z) tel que $|z'| = 1$

3) a) Vérifier que $(z' - 1)(z + i) = -2i$

b) Montrer que si M appartient au cercle de centre A et de rayon 3 M' appartient à un cercle que l'on caractérisera.

4) On pose $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in]\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

a) Vérifier que

$$e^{i\theta} - i = 2i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ et que } e^{i\theta} + i = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

b) En déduire la forme exponentielle de z' .