

| | | |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------|
| L-S-Ibn khaldoun Prof : A - khaled | Devoir de contrôle n°3 Mathématiques | Classe :4 sc1 Durée :2h |
|-----------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|------------------------------------------|

EXERCICE N°1 (4 pts)

Soit $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t} dt$

1/ Justifier l'existence de I_n et que $I_n \geq 0$

2/ a -- Montrer que pour entier naturel n : $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

b -- En déduire la limite de I_n

3/ a -- Etudier la monotonie de la suite I_n

b -- Montrer que pour tout n de \mathbb{N} on a : $I_{n+1} = \frac{-1}{e} + (n+1) I_n$

c -- En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* on a : $\frac{1}{e(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{e.n}$

d -- En déduire la limite de nI_n

EXERCICE N°2 (4 pts)

1/ Soit $u(x) = 2 \sin x - 1$ définie sur $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

Etudier les variations de u sur I et montrer que $u(I) =]-3, 1[$

2/ Soit $F(x) = \int_0^{u(x)} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$

a -- Montrer que F est dérivable sur I et que $F'(x) = 1$

b -- En déduire que pour tout x de I : $F(x) = x - \frac{\pi}{6}$

3/ Soit $k = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$

a -- Vérifier que $K = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$

b -- En déduire la valeur de K

EXERCICE N°

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = (x-1)e^{2-x}$ et soit C sa courbe

Représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1/ Etudier les variations de f et tracer C

2/ Soit α un réel de $]1, +\infty[$. Calculer $A(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C et les droites d'équations $y = 0$; $x = 1$ et $x = \alpha$

3/ On pose $J_n = \frac{1}{n!} \int_1^2 (x-1)^n e^{(2-x)} dx$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

a) interpréter graphiquement J_1

b) par une intégration par parties, Montrer que $J_{n+1} = J_n - \frac{1}{(n+1)!}$

c) En déduire que pour tout n de \mathbb{N}^* , $J_n = e - \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

d) Montrer que pour tout n de \mathbb{N}^* , $0 \leq J_n \leq \frac{e}{n!}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$

Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} \right)$

EXERCICE N°

Dans l'espace munit d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(0, -1, 0)$; $B(1, -2, 0)$ et $C(1, 0, 1)$

1/ a--Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés

b—Déterminer une équation cartésienne du plan $P=(ABC)$

2/ Calculer l'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre $OABC$

3/ Soit $S = \{M(x, y, z) \text{ de l'espace} / x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 7 = 0\}$

a—Montrer que S est une sphère dont on précisera son centre I et le rayon R

b—Etudier la position relative de S et P et déterminer $S \cap P$

4/ Montrer qu'il existe deux plans P_1 et P_2 qui sont parallèles à P et tangents à S