

L.S.ELKSOUR

Enseignant B.Anis

Classes : 4^{ème} SC-Exp₁

Durée : 3h

Devoir de synthèse n°2

Mathématiques

Exercice1(3pts)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant votre réponse.**

- 1) Le domaine de définition de la fonction f définie par $f(x)=\ln(1-x)$ est: $]0, +\infty[$
- 2) Le volume de solide S engendré par la rotation de l'arc $[\widehat{AB}] = \{M(x, y); 1 \leq x \leq 3 \text{ et } y = \sqrt{2x + 1}\}$ autour de l'axe (O, \vec{i}) est 10π
- 3) La valeur moyenne de la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\sqrt{x}$ est : $\frac{2}{3}$
- 4) La fonction $x \rightarrow \int_{-1}^x \sqrt{t-1} dt$ est dérivable sur $[1, +\infty[$.

Exercice2(5pts)

La courbe (C) dans l'**annexe I** représente une fonction f définie sur \mathbb{R} dans un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) les droites d'équations respectives $y=x+2$ et $y=x-2$ sont des asymptotes à (C).

(C) admet une tangente horizontale au point O.

I) En utilisant le graphique répondre aux questions suivantes

- 1) Déterminer le tableau de variation de f .
- 2) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- 3) a) Montrer que f réalise une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle J à préciser
b) Construire la courbe de (C') de la fonction f^{-1} fonction réciproque de f .
c) f^{-1} est-dérivable en 0 ? Expliquer.

4) Soit $\lambda \in]0, +\infty[$ et \mathcal{A}_λ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C) l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\lambda$

a) Hachurer \mathcal{A}_λ (choisir une valeur de $\lambda > 2$).

b) Vérifier que $x - 2 \leq f(x) \leq x + 2$ pour tout réels x .

b) En déduire que $\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$.

c) Déterminer alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda$.

II) La courbe (C) dans l'annexe I représente la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2+4}}$$

1) En utilisant la question I)2) montrer que $a=1$ et $b=-2$.

2) Calculer \mathcal{A}_λ .

3) Retrouver alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda$

Exercice3(3pts)

Soit la suite (I_n) définie sur \mathbb{N} par $I_n = \int_0^1 x^{2n} \sin(\pi x) dx$.

1) Calculer I_0 .

2)a) Montrer $I_n \geq 0$ pour tout entier n .

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3)a) Montrer que pour tout entier n on a : $I_n \leq \frac{1}{2n+1}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$

Exercice4(5pts)

Soit f la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et que $f'(x) = \frac{-4}{(\sqrt{x^2-4})^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f .

2)a) Montrer que f réalise une bijection de $]2, +\infty[$ [Sur un intervalle K à préciser.

b) Montrer que l'équation $f(x)=x+1$ admet une seule solution α .

Vérifier que $2.15 < \alpha < 2.2$.

c) Tracer les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ dans un même repère orthonormée.

d) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in K$.

3) En utilisant une intégration par parties calculer $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} x f'(x) dx$

Exercice 5 (4pts)

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1 et P le plan contenant la droite (AC) et parallèle à la droite (DE). On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1)a) Vérifier que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) Donner alors une équation cartésienne du plan P.

2) Soit M et N deux points pris respectivement sur (AC) et (DE) tels que

$\overrightarrow{AM} = a\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DN} = b\overrightarrow{DE}$ avec a et b sont deux réels.

a) Vérifier que M(a, a, 0) et N(0, -b+1, b)

b) Déterminer a et b pour que \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE}$ soient colinéaires.

Pour la suite on prendra $a = b = \frac{1}{3}$.

3) Soit S la sphère de centre $I(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6})$ et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

a) Vérifier que [MN] est un diamètre de S.

b) Vérifier qu'une équation du plan (ABC) est : $z=0$

c) Montrer que le plan (ABC) coupe S suivant un cercle dont on précisera le rayon r et les coordonnées de son centre J.

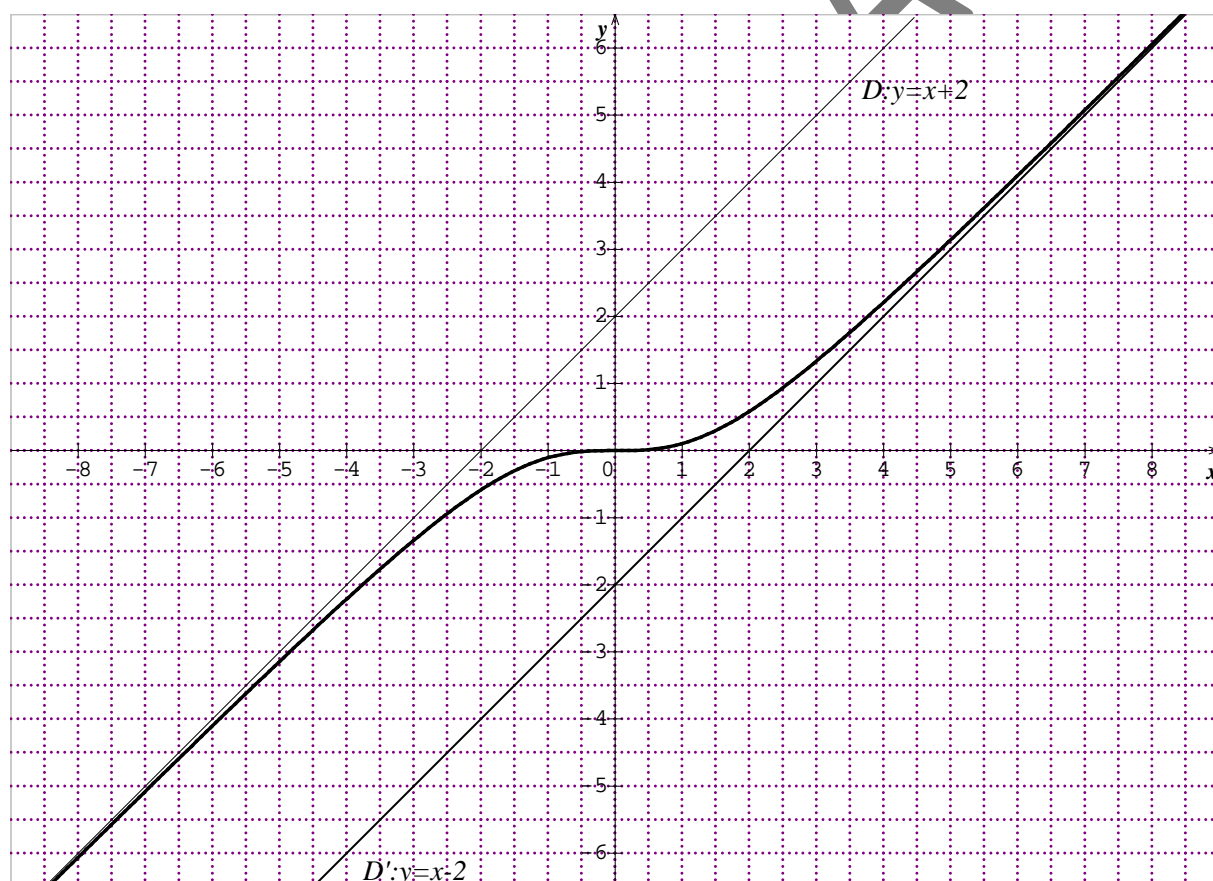
Feuille à rendre avec les copies.

Nom :

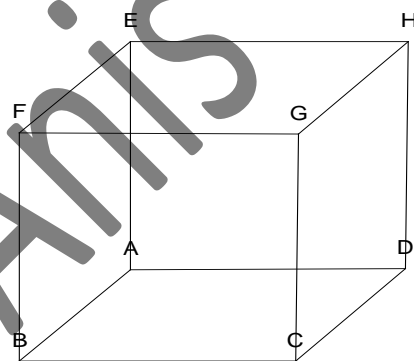
Prénom :

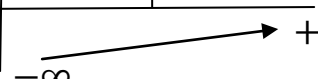
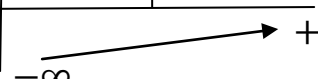
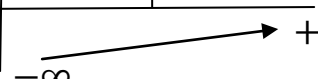
Classe :

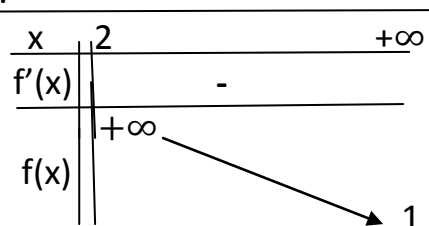
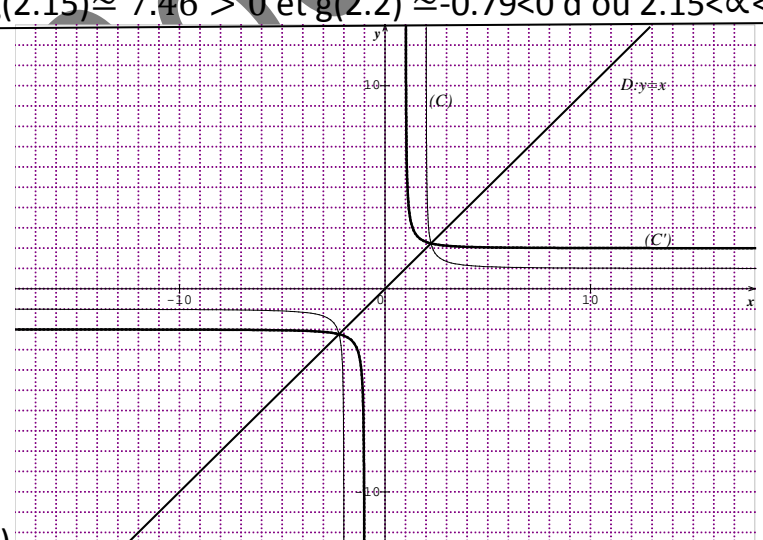
ANNEXE I



Bouzouraa.Anis



<p>Exercice1</p> <p>F- V-V-F</p>	<p>4x0.75 (3x0.25 sans justification)</p>																
<p>Exercice2</p> <p>1)</p> <table style="margin-left: 40px;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">$f'(x)$</td> <td style="padding: 5px;">$+$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$+$</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;">f</td> <td colspan="3" style="padding: 5px; text-align: center;">  </td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> <td style="padding: 5px;"></td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> </table>	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$f'(x)$	$+$	0	$+$	f					$-\infty$		$+\infty$	<p>0.5pts</p>
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$f'(x)$	$+$	0	$+$														
f																	
	$-\infty$		$+\infty$														
<p>2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$</p>	<p>2x0.25</p>																
<p>3)a) On a f est continue et strictement croissante sur IR d'où elle réalise une bijection de IR sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R} = \mathbb{J}$</p>	<p>0.5</p>																
<p>b)</p>	<p>0.5</p>																
<p>c) on (C) admet une tangente horizontale au point O d'où (c') admet une tangente verticale au point O d'où f^{-1} n'est pas dérivable en 0 .</p>	<p>0.25</p>																
<p>4) a)</p>	<p>0.25</p>																
<p>b) On a (C) est au dessus de D' et au dessous de D d'où $x-2 \leq f(x) \leq x+2$ pour tout réels x.</p>	<p>0.25</p>																
<p>c) On a $x-2 \leq f(x) \leq x+2$ pour tout réels x. alors $\int_0^\lambda x-2 dx \leq \int_0^\lambda f(x) dx \leq \int_0^\lambda x+2 dx$ d'où le résultat</p>	<p>0.5</p>																
<p>d) On a $\frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda \leq \mathcal{A}_\lambda \leq \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$. $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{2} - 2\lambda = +\infty = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2}{2} + 2\lambda$ d'où $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda = +\infty$.</p>	<p>0.5</p>																
<p>II)1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 = a$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 = a + \frac{b}{2} \Rightarrow b = -2$.</p>	<p>2x0.25</p>																
<p>2) $\mathcal{A}_\lambda = \int_0^\lambda x - \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2\sqrt{x^2+4} \right]_0^\lambda$ $= \frac{1}{2}\lambda^2 - 2\sqrt{\lambda^2+4} + 4$.</p>	<p>0.5</p>																
<p>3).....</p>	<p>0.25</p>																
<p>Exercice3</p> <p>1) $I_0 = \left[\frac{-1}{\pi} \cos(\pi x) \right]_0^1 = \frac{2}{\pi}$</p>	<p>0.5</p>																
<p>2)a) on a $x \in [0,1] \Rightarrow \pi x \in [0,\pi] \Rightarrow \sin(\pi x) \geq 0$ $x^{2n} \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier n</p>																	

D'où $X^{2n} \sin(\pi x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et pour tout entier n d'où le résultat.	0.75
b) $I_{n+1} - I_n = \dots \leq 0$ (I_n) est décroissante et minorée par 0 d'où elle est cv.	0.5
3)a) on a $X^{2n} \sin(\pi x) \leq x^{2n} \dots$	0.5
b) $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1} \dots$	0.75
Exercice4	
1)a).....	0.75
b) 	0.75
2)a) On a f est continue et strictement croissante sur $]2, +\infty[$ d'où elle réalise une bijection de $]2, +\infty[$ sur $f(]2, +\infty[) =]1, +\infty[= k$	0.5
b) Soit $g(x) = f(x) - x - 1$ pour tout réel x de $]2, +\infty[$ la fonction $: x \rightarrow -x - 1$ est une fonction polynôme d'où elle est dérivable sur \mathbb{R} en particulier sur $]2, +\infty[$. Et on a f est dérivable sur $]2, +\infty[$ alors g est dérivable sur $]2, +\infty[$. $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$ pour tout réels x . D'où g est strictement décroissante sur $]2, +\infty[$ et on a g est continue sur $]2, +\infty[$ car elle est dérivable ainsi g est une bijection de $]2, +\infty[$ sur $g(]2, +\infty[) = \mathbb{R}$ et on a $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha \in]2, +\infty[$. $g(2.15) \approx 7.46 > 0$ et $g(2.2) \approx -0.79 < 0$ d'où $2.15 < \alpha < 2.2$.	0.75
c) 	1

d) $f^{-1}(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$ pour tout x de K	0.75	
3) $\int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} xf'(x)dx = [xf(x)]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} - \int_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} f(x)dx$ $= [xf(x) - \sqrt{x^2-4}]_{\sqrt{5}}^{\sqrt{8}} = -2.$	0.5	
Exercice5 1) A(0,0,0), B(1,0,0), D(0,1,0), E(0,0,1) et C(1,1,0) a) $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1-0 \\ -(1-0) \\ -1 \times 1 \end{pmatrix}$ d'où le résultat.		0.5
b) $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan P d'où P : x-y-z+d=0 avec d est un réel à déterminer A est un point de P d'où P : x-y-z=0.		1
2) a) M(a,a,0) et N(0,-b+1, b) b) $\overrightarrow{MN} \begin{pmatrix} -a \\ -b+1-a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. \overrightarrow{MN} et $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{DE}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \begin{cases} -2b - a + 1 = 0 \\ a - b = 0 \\ -b - 2a + 1 = 0 \end{cases}$ d'où $a=b=\frac{1}{3}$		1
3) a) $M^*N=I$ et $IM=IN=\frac{\sqrt{3}}{6}$ $M(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ et $N(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$		0.5
b)		0.5
c)		0.5