Lycées Tahar Sfar et Ibn Sina Mahdia	**Devoir de synthèse n° 2** *Mathématiques*	*Classe : 4 ème Sc exp*
Date : 03 /03 / 2010	*Profs : Mme Turki et Mrs Baccar, Hamza et Meddeb*	*Durée : 3 heures*

Exercice n°1 : (3 pts)

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse inexacte enlève 0,25 point, l'absence de réponse est compté 0 point. Si le total est négatif, alors la note sera ramenée à zéro.

1) Pour chacune des propositions suivantes, répondre par **vrai** ou **faux** sans justification.

P_1 : On donne les fonctions F et G définies sur IR par :

$$F(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+2} \quad \text{et} \quad G(x)=\frac{4x^2+6x+9}{x^2+x+2}.$$

F et G sont deux primitives d'une même fonction.

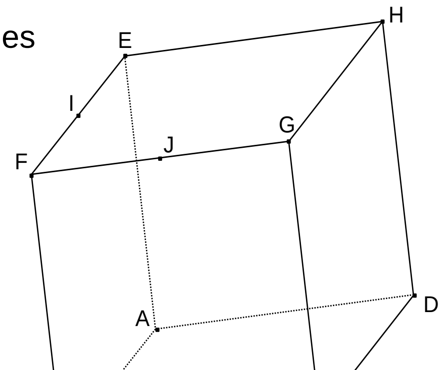
P_2 : $\int_0^1 \sqrt[3]{x}\ dx = 1-\int_0^1 x^3\ dx$.

P_3 : Soit f une fonction continue sur $[0\,,1]$.

Si $\int_0^1 (f(t)-1)dt=0$. alors, la valeur moyenne de f sur $[0\,,1]$ est égale à 1.

2) Pour chacune des questions suivantes, une seule parmi les réponses proposées est correcte. Indiquer la lettre qui correspond à la bonne réponse.

Soit $ABCDEFGH$ un cube, I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$, L est le point défini par : $\overrightarrow{AL}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.



On considère le repère $(A\,,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

Soit P le plan d'équation : $4x-4y+3z-3=0$.

Q_1 : Le plan P est le plan :

$a/\ (GLE)$ $\qquad$ $b/\ (LEJ)$ $\qquad$ $c/\ (GFA)$

Q_2 : Le plan parallèle à P passant par I coupe la droite (FB) en M de coordonnées :

$a/\ \left(1\,,0\,,\frac{1}{5}\right)$ $\qquad$ $b/\ \left(1\,,0\,,\frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $c/\ \left(1\,,0\,,\frac{1}{3}\right)$.

Q_3 : Une représentation paramétrique de la droite (GL) est :

$a/\ \begin{cases} x=\frac{7}{4}+a \\ y=4+4a \\ z=4+4a \end{cases}$ $\qquad$ $b/\ \begin{cases} x=3+\frac{1}{4}a \\ y=a \\ z=a \end{cases}$ $\qquad$ $c/\ \begin{cases} x=1+a \\ y=1+a \\ z=1+4a \end{cases}$

Exercice n°2 : **(5 pts)**

L'espace $\mathscr{E}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

On considère les points $A(-1, -1, 1)$ et $B(-1, 2, -2)$ et le plan P d'équation : $x + y + z - 2 = 0$.

1) Montrer que la droite (AB) est parallèle à P.
2) Soit a un réel, on désigne par S_a l'ensemble des points M de $\mathscr{E}$ tels que :

   $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2ay + 2az + a^2 + a = 0$.

   $a/$ Montrer que, pour tout réel a, S_a est une sphère de centre $I_a(-1, a, -a)$ et de rayon $R_a = \sqrt{a^2 - a + 1}$.

   $b/$ Montrer que $I_a \in (AB)$.

   $c/$ Déterminer a pour que S_a soit tangente à P.
3) Soit Q le plan d'équation : $y - z - 4 = 0$.

   $a/$ Vérifier que Q est perpendiculaire à (AB).

   $b/$ Déterminer a pour que S_a coupe Q suivant un cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{5}$.

   $c/$ Déterminer dans ce cas les coordonnées du centre de $\mathscr{C}$.

Exercice n°3 : **(5 pts)**

Soit (I_n) la suite définie sur IN par : $I_n = \int_0^{\pi/6} x^n \sin 3x \, dx$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $I_n \geq 0$.

   $b/$ Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

   $c/$ En déduire que (I_n) est convergente.
2) $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN$, $I_n \leq \int_0^{\pi/6} x^n \, dx$.

   $b/$ Déterminer alors la limite de la suite (I_n).
3) $a/$ Calculer I_0 .

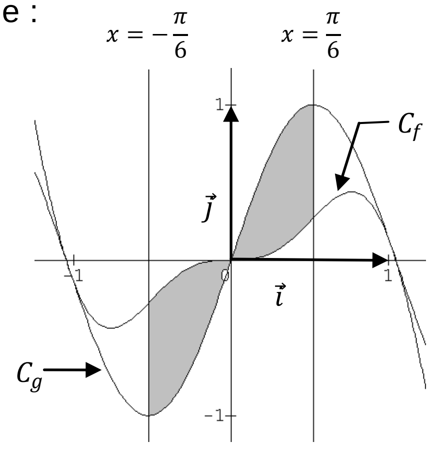
   $b/$ En utilisant une intégration par parties, montrer que : $I_1 = \dfrac{1}{9}$.

   $c/$ En effectuant deux intégrations par parties, montrer que :

   pour tout $n \in IN$, $I_{n+2} = \dfrac{n+2}{9}\left(\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1} - (n+1)I_n\right)$.

   $d/$ On a représenté ci-contre les courbes représentatives dans un repère orthonormé, des fonctions f et g définies par : $f(x) = x^2 \sin 3x$ et $g(x) = \sin 3x$.

   Calculer l'aire de la partie grise.



Exercice n°4 : **(7 pts)**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) $a/$ Montrer que, pour tout $x \in IR$, $f'(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

   $b/$ Montrer que, pour tout $t \in IR$, $f'(t) \leq 1$.

   $c/$ En déduire que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) \leq (x-1)$.

2) $a/$ Montrer que le point $I(0, -1)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$.

   $b/$ Ecrire une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point I.

   $c/$ Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à T.

   $d/$ En déduire que I est un point d'inflexion de $\mathscr{C}$.

3) $a/$ Dresser le tableau de variation de f.

   $b/$ Tracer T et $\mathscr{C}$ ainsi que ses asymptotes.

4) $a/$ Montrer que f est une bijection de IR sur $]-2, 0[$.

   $b/$ Tracer $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Montrer que l'équation : $f(x) = x$, admet dans l'intervalle $]-2, -1[$ une solution unique a.

6) $a/$ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, la droite $\Delta: y = x$ et les droites d'équations : $x = a$ et $x = 0$.

   $b/$ En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_a^{-1} f^{-1}(x)dx$.

Bonne chance