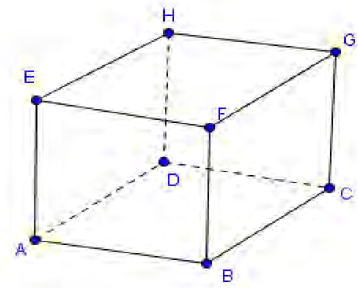
LYCEE PILOTE DE GABES *Prof :* M^r Jouou Louey	**EPREUVE DE MATHEMATIQUES** (Mars 2011)** Durée : 120 mn	Classe : 4ème Sc-Exp 1 **DEVOIR DE CONTRÔLE N°1** **2ème semestre**

EXERCICE N°1 : (3points)

Répondre par **vrai** ou **faux** ,**sans justification.**

1-/Dans la figure ci-contre **ABCDEFGH** est un cube d'arête **2**.

a-) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$ **.b-)** $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{BH} = 2$ **c-)sin(HBG) =** $\frac{\sqrt{3}}{3}$



2-/L'ensemble des points **M** de l'espace $\mathcal{E}$ tels que

$MA^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB} = AB^2$ est un plan .

3-/ L'ensemble des points **M** de l'espace $\mathcal{E}$ tels que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB} = AB$ est une sphère

4-/$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur directeur de la droite intersection des plans**(ACG)et (BDH).**

EXERCICE N°2 : (6points)

L'espace $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère les points **A(0 ,1 , 0)** ; **B (1 , 0 , -2)** ; **C (0 , 0 , -1) et D(1 , -1 , 0)** .

1-/ a-)Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ puis calculer . $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}$

b-) En déduire que les points **A, B, C** déterminent un plan **P** et que les points **A, B, C,** et **D** ne sont pas coplanaires.

c-) Calculer L'aire du triangle ABC et le volume du tétraèdre **DABC**, puis déduire la distance de **D** à **P**.

2-/a-) Montrer qu'une équation cartésienne du plan **P** est **x-y+z+1=0 .**

b-) Montrer que **H(0, 0, -1)**est le projeté orthogonal de **D** sur **P**.

3-/On considère **S =** $\{M(x, y, z) \text{ tels que } x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2 = 0\}$

a-) Montrer que le point **E(2 ,-2,** $\sqrt{2}$ **)** appartient à **(S)** .

b-) Montrer que **S** est une sphère dont on précisera le centre et le rayon**.**

c-) Montrer que **P** et **S** sont sécants suivant un cercle $\mathcal{C}$ que l'on caractérisera.

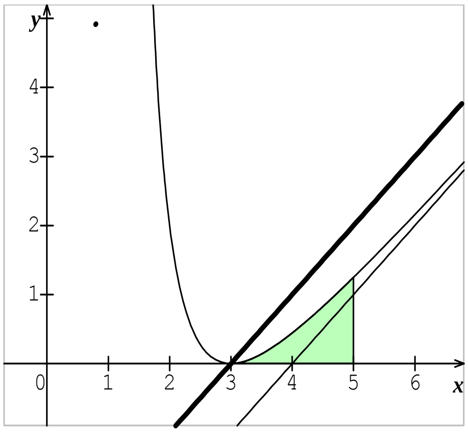
4-/Déterminer l'ensemble des points **M** de P tels que le triangle **DME** soit isocèle et rectangle en **D**

.EXERCICE N°3 : (3points)

Ci -Dessous la représentation **Cf** d'une fonction **f** définie et dérivable sur $]1, +\infty[$.

Les droitesΔ etΔ'd'équations **x=1** et **y=x- 4** sont des asymptotes à **Cf.**

A désigne l'aire exprimée en unité d'aire de la partie délimitée par **Cf** ,l'axe des abscisses, et les droites d'équations respectives **x= 3** et **x=5**



1-/a-) Par lecture graphique donner la position relatives de **Cf** et Δ''d'équation **y=x-3**

b-) En déduire que **A**$\leq$**2.**

c-) Par des considérations d'aires prouver que **A>**$\frac{1}{2}$

2-/Soit **J=**$\int_3^5 x f'(x)dx$. A l'aide d'une intégration par partie , montrer que **J= 5f(5) - A**

3-/Sachant que **f(x)=x-4 +**$\frac{4}{(x-1)^2}$;déterminer la valeur

www.devoir@t.net © 2011

de **A** puis déduire la valeur de **J**

EXERCICE N°4 : (8points)

1-/ Soit la fonction **f** définie sur [**0** , **1** [par **f (x) =** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe

représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$

a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

b-) Dresser le tableau de variation de **f**.

c-) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

d-) Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e-) Tracer **(** $\mathscr{C}$ **)** et **(** $\mathscr{C}'$ **)** courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère$(O,\vec{i},\vec{j})$.

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe *(* $\mathscr{C}$ *)* et les droites d'équations respectives **:**

x=0 et **y=1**. Montrer que **A=**$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}$ **dx .**

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur **IN** par $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\, dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

b-) Prouver que la suite est convergente.

c-) Montrer que pour tout **n** de **IN** ,$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$, puis déduire la limite de la suite.

4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur **IN** par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-) Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \dots\dots\dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b-) En intégrant l'égalité précédente montrer que ∀**n** de **IN**; $v_n - I = (-1)^n u_n$. **où** $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

c-) Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

d-) Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de **I**

5-/ Soit φ une fonction continue sur **IR** . On considère la fonction définie sur l'intervalle

$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{tgx} \frac{\varphi(t)}{1+t^2}$ **dt .**

a-) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et que $F'(x) = \varphi(tgx)$

b-)Déterminer **F(x)** dans chacun des cas suivants ;$\varphi(t) = 1$, $\varphi(t) = t^2$.

c-) En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$ puis tirer la valeur de **A.**

www.devoir@t.net © 2011