Lycée Tamaghza 2013-2014	Devoir de Synthèse N° 2	Classe : $4^{\text{ème}}$ SI

Exercice n° 1 :

Répondre par Vrai ou Faux aux assertions suivantes, et rectifier celles qui sont fausses.

A et B désignent deux matrices carrées de même ordre.

1. $(AB)^t = A^t B^t$.

2. $(A^t)^t = A$.

3. Si A et B sont inversibles, alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} com(A)$

Exercice n° 2 :

On considère, dans $\mathbb{R}^2$, le système linéaire : $(S_\lambda)\begin{cases}\lambda x - y = 1\\ x + \lambda y = 0\end{cases}$, où λ est un paramètre réel.

1. Calculer le déterminant D_λ du système (S_λ) et en déduire que (S_λ) est un système de Cramer.

2. Résoudre alors le système (S_λ).

Exercice n° 3 :

1. On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1\\ -3 & 3 & 2\\ 9 & -4 & -1\end{pmatrix}$.

1. a. Calculer AB.

1. b. En déduire que A est inversible et donner sa matrice inverse A^{-1} .

2. Soit p la fonction polynomiale telle que $p(x) = ux^3 + vx^2 + wx$, où u, v et w sont des réels .

Soit Γ 1a représentation graphique de P dans un repère cartésien du plan.

On fait les hypothèses suivantes :

(i) La tangente à Γ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 4x - 4$.

(ii) Γ admet un point d'inflexion d'abscisse -1 .

2. a. Démontrer que le triplet (u, v, w) est une solution du système : $(S)\begin{cases}u + v + w = 0\\ 3u + 2v + w = 4\\ -3u + v = 0\end{cases}$.

2. b. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) et expliciter $p(x)$.

Exercice n° 4 :

Soit f la fonction réelle définie sur $]0,2[$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}$.

1. a. Montrer f que est dérivable sur $]0,2[$, où $f'(x)=\dfrac{1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$.

1. b. Etudier les variations de f et en déduire que f est une bijection de $]0,2[$ sur $]-\infty,+\infty[$.

2. Etablir que pour tout réel t, $f^{-1}(t)=1+\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ où f^{-1} désigne la fonction réciproque de f

On considère désormais la fonction réelle φ définie sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\varphi(x)=f^{-1}(tgx),\ si\ x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \&\ \varphi\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0\ \&\ \varphi\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\ .$$

3. a. Montrer que φ est continue sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3. b. Prouver que pour tout réel $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x)=1+sinx$.

(On distinguera les cas : $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, $x=-\dfrac{\pi}{2}$ et $x=\dfrac{\pi}{2}$) .

4. a. Etablir que φ est une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,2]$.

4. b. Montrer que la fonction réciproque φ^{-1} est dérivable sur $]0,2[$, où $\left(\varphi^{-1}\right)'(u)=\dfrac{1}{\sqrt{2u-u^2}}$.

(On pourra poser $u=1+sinx$)