Lycée Jammel 3	Devoir de Contrôle n°3	Prof :Afli Ahmed
A.S 2013-2014	Classe 4M Durée : 2h	24-04-2014

Exercice 2:

1.) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E) : $91x + 10y = 1$.

a. Enoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution de l'équation (E)

b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x + 10y = 412$

c. Résoudre (E')

2.) Montrer que les entiers $A_n = 3^{2n} - 1, ou\ n\ est\ un\ entier\ naturel\ non\ nul, sont\ divisibles\ par\ 8$

3.) On considère l'équation (E'') : $A_3x + A_2y = 3\,296$.

a. Déterminer les couples d'entiers relatifs (x,y) solutions de l'équation (E'')

b. Montrer que (E'') admet pour solution un couple unique d'entiers naturels. Le déterminer.

Exercice 2:

1.) On considère les équations différentielles $(E_0) : y' - y = 0$ et (E) : $y' - y = e^x$

a. Résoudre l'équation(E_0)

b. Vérifier que la fonction g : $x \longmapsto xe^x$ est une solution de l'équation (E)

c. Montrer que φ est une solution de (E) si et seulement si $(\varphi - g)$ est une solution de de (E_0)

d. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2.) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et tel que pour tout réel x, $f(x) = e^x - 2 + \int_0^x f(t)dt$

a. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est une solution de (E).

b. En déduire que pour tout réel x, $f(x) = (x - 1)e^x$.

3.) a. Dresser le tableau de variation de la fonction f

b. Pour tout x ≥ 1, on pose h(x) = f(x) - x

On donne dans le tableau ci-dessous le sens de variation sur [1,+∞[de la fonction h.

x	1	+∞
h'	+	
h	↗	

Recopier et compléter la tableau de variation de h.

En déduire que l'équation f(x) = x admet dans [1,+∞[une seule solution α *et que* $\alpha \in]1,3\,;1,4[$

c. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$).Tracer (C)

4.) Soit ψ la restriction de f à l'intervalle [0 , +∞[

a. Montrer que ψ est une bijection de [0 , +∞[sur [-1 , +∞[.

b. Tracer la courbe (C') de ψ^{-1} dans le meme repere

c. On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes (C) et (C') et les axes (OI) et (OJ) . Prouver que $\mathcal{A} = \alpha^2 - 2(2 + \alpha - e^\alpha)$ (u.a)

Exercice 3:

L'espace est munie d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On donne les points

A(1,3,2) , B(1,-1,-2) , C(2,4,1)

1.) a. Montrer que les points A,B et C ne sont pas alignés.

b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $2x - y + z - 1 = 0$

2.) Soit S la sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2z - 4 = 0$

a. Déterminer le centre I et le rayon R da la sphère S

b. Montrer que la sphère S coupe le plan (ABC) suivant le cercle (C) de diamètre [AB].

c. Montrer que la droite (AC) est tangente au cercle (C)

3.) Soit h l'homothétie de centre C et de rapport 3

a. Donner l'expression analytique de h

b. Déterminer le rayon de la sphère S' = h(S) et les coordonnées de son centre J

c. Montrer que le plan (ABC) coupe la sphère S' suivant un cercle (C') .

d. Montrer que la droite (AC) est tangente à (C') en un point E que l'on précisera

Exercice 4:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1.) On considère la courbe (C) d'équation : $x^2 + 4y^2 = 1$

a. Déterminer la nature de (C) et ses éléments caractéristiques.

b. Tracer (C)

2.) On considère les droites D et D' d'équations respectives x = 1 et x = -1 et le point $F\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$

Soit M_0 le point de (C) de coordonnées $(\cos\theta\ ;\frac{1}{2}\sin\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\}$

a. Ecrire l'équation de la tangente T à la courbe (C) en M_0

b. La tangente T coupe les droites D et D' respectivement en K et K' . Calculer $\overrightarrow{Fk}.\overrightarrow{FK'}$

En déduire que le triangle KFK' est rectangle.

Exercice 4:

Un sondage effectué récemment dans la région de Kairouan à propos de l'exploration du gaz de schiste

donne les résultats suivants :

- 65% des personnes interrogées sont contre l'exploration du gaz de schiste.
- Parmi les personnes qui sont contre cette exploration, 70% sont des écologistes.
- 52,5% des personnes interrogées sont des écologistes

- On note C l'évènement : « la personne interrogée est contre l'exploration»
- On note E l'évènement : « la personne interrogée est écologiste »

1.) Construire un arbre pondéré et donner les probabilités P(C) , P(E/C) et P(E)

2.) Calculer la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste et soit pour cette exploration.

3.) On interroge un écologiste .Quelle est la probabilité qu'il soit contre l'exploration du gaz de schiste ?

4.) On choisit au hasard 5 personnes parmi celles qui ont été interrogées lors du sondage.

(On suppose que les choix des 5 personnes sont indépendants les uns des autres).

Quelle est la probabilité qu'il y ait aux plus 2 qui soient pour l'exploration et

soit écologiste. ?