Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par f(x)=2x-xlnx si x>0 et f(0)=0

1)Etudier la continuité et la dérivabilité de f à droite en 0.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2)Etudier les variations de la fonction f.

3)Soit (C) la représentation graphique de la fonction f dans un repère $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ du plan.

a) Déterminer les coordonnée du point d'intersection de (C)avec l'axe des abscisses.

b) Calculer $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat.

c) Construire (C).

4) Soit g la restriction de f à l'intervalle I = $[e,+\infty[$

a)Montrer que g réalise une bijection de I sur lui-même .

b) Construire la courbe de g^{-1} dans le même repère.

Exercice 2

1) Soit h la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par h(x)=x+1-xlnx

a) Etudier les variations de h .

b) Montrer que l'équation h(x)=0 admet une seule solution
$\alpha \in]0;+\infty[\; et\; que \; 3.5 < \alpha < 3.6$

c) En déduire le signe de h(x) pour tout $x \in]0;+\infty[$.

2) On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par : f(x)=$\frac{lnx}{x+1}$

a) Montrer que f'(x)=$\frac{h(x)}{x(x+1)^2}$ pour tout $x \in]0;+\infty[$ .En déduire le tableau de variation de f.

b) Montrer que f (α)= $\frac{1}{\alpha}$.En déduire un encadrement de f (α).

c) Construire la représentation graphique de f dans un repère orthonormée du plan.

Exercice 3

On considère la fonction g définie par g(x)=$\frac{1+\ln(1+x^2)}{1+x^2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction g.

2) Etudier la parité de g.

3) Etudier les variations de g.

4) Montrer que l'équation g(x)=x admet dans IR_+ une seule solution β.Vérifier que $\frac{3}{4} < \beta < 1$ et déduire le signe de (g(x)-x) sur IR_+.

5) Tracer la représentation graphique de g.

Exercice 4

Soit la fonction f définie par f(x)=Ln(x+1)-Lnx-$\frac{1}{x}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.

2)Etudier les variations de la fonction f.

3)En déduire que Ln (x+1)-Ln x$\leq \frac{1}{x}$ pour tout x$\geq$ 1

4) Démontrer que Ln(x+1) –Lnx $\geq \frac{1}{x+1}$. pour tout x$\geq$ 1

5)Soit la suite (U_n) définie sur IN^* par $U_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

a) Montrer que $U_n \geq$ Ln(n+1) pour tout entier non nul.

b) Etudier la convergence de la suite (U_n).

Exercice 5

Les courbes en rouge(C) et en noire (C') sont celles d'une fonction f et de sa fonction dérivée f'.La droite d'équation y=x-1 est une asymptote à (C') au V(+∞)

1) Identifier la courbe de f et celle de f'.

2)Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) - x$ et f'(1).

3) La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ par f(x)=$\frac{ax^2+bx-Lnx}{x}$.ou a et b sont deux réels.

a) En utilisant la question 2) déterminer les réels a et b.

b)Montrer que f admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

c)Déterminer la primitive F de f sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en 1 .

d) Calculer l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par (C) ;(C') ,l'axe des abscisses et les droites d'equations x=1 et x= 2.

e)Soit H(x)=$\int_1^{\sqrt{1+x^2}} f(t)dt$ pour tout x de $]0,+\infty[$ .Montrer que H est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer H'(x).