

<p style="text-align: center;"><b>L. Ibn Khaldoun</b> <b>Oueslatia</b></p>	<p><b>Devoir de Synthèse n° 2</b> <b>En Mathématiques</b></p>	<p><b>Classes : 4<sup>ème</sup> Sc .Inf</b></p>
<p><i>Prof : M Mehrez Jamel</i></p>		<p><b>Date : 04/ 03 / 2014</b></p>
		<p><b>Durée : 3 heures</b></p>

**Exercice n° 1** : ( 5 points )

1 ) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $3x - 8y = 5$  .

a ) Vérifier que  $(-1 ; -1)$  est une solution de (E) .

b ) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  , l'équation (E) .

2 ) Soient  $n$  ,  $a$  et  $b$  trois entiers relatifs tels que 
$$\begin{cases} n = 3a + 2 \\ n = 8b + 7 \end{cases}$$

a ) Vérifier que  $(a ; b)$  est une solution de (E) .

b ) Montrer que  $n = 24k - 1$  où  $k \in \mathbb{Z}$  .

c ) En déduire que  $n \equiv 23 [24]$  .

3 ) Soit  $p$  un entier naturel .

a ) Montrer que :  $2^{2p} \equiv 1 [3]$  et  $7^{2p} \equiv 1 [8]$  .

b ) Vérifier que  $1991 \equiv 2 [3]$  et  $1991 \equiv 7 [8]$  .

c ) Montrer que  $1991^{2014} - 1$  est divisible par 24 .

**Exercice n° 2** : ( 5 points )

On considère les matrices  $A = \begin{pmatrix} 500 & 600 & 1000 \\ 10 & 10 & 20 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} -1 & 40 & 200 \\ 1 & -50 & 0 \\ 0 & 10 & -100 \end{pmatrix}$  .

1 ) a ) Montrer que A est inversible .

b ) Effectuer le produit  $A \times B$  , en déduire la matrice  $A^{-1}$  inverse de A .

2) Soit le système  $(S) : \begin{cases} 500x + 600y + 1000z = 7900 \\ 10x + 10y + 20z = 150 \\ x + y + z = 12 \end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système  $(S)$ .

b) En déduire la résolution dans  $\mathbb{R}^3$ , du système  $(S)$ .

3) Un bijoutier fabrique pendant une semaine 12 bracelets en or, en trois modèles  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

Il dispose de 150 grammes d'or pour la fabrication de ces bracelets d'un coût total de 7900 dinars.

De plus, la masse et le coût de fabrication d'un bracelet de chacun des trois modèles sont donnés dans le tableau suivant :

Type de bracelet	$M_1$	$M_2$	$M_3$
Le coût de fabrication d'un bracelet en dinars	500	600	1000
Masse d'un bracelet ( en grammes)	10	10	20

a) Ecrire le système d'équations qui traduit la situation décrite ci-dessus.

b) Déterminer alors le nombre de bracelets fabriqués pour chacun des modèles  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

### **Exercice n° 3** : ( 5,5 points )

Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x - 2 - \ln x$ .

On désigne par  $(\mathcal{C})$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ .

2) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et que  $f'(x) = \frac{x-1}{x}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

3) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right) = 1$ .

b) En déduire que  $\mathcal{C}$  admet une branche infinie de direction celle de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = x$  au voisinage de  $+\infty$ .

4) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $\alpha$  et  $\beta$  telles que  $\alpha \in ]0, 1 ; 0, 2[$  et  $\beta \in ]3, 1 ; 3, 2[$ .

b) Tracer  $\Delta$  et  $\mathcal{C}$ .

**Exercice n° 4** : ( 4,5 points )

1 ) Soit la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = x + \ln x - x \ln x$  .

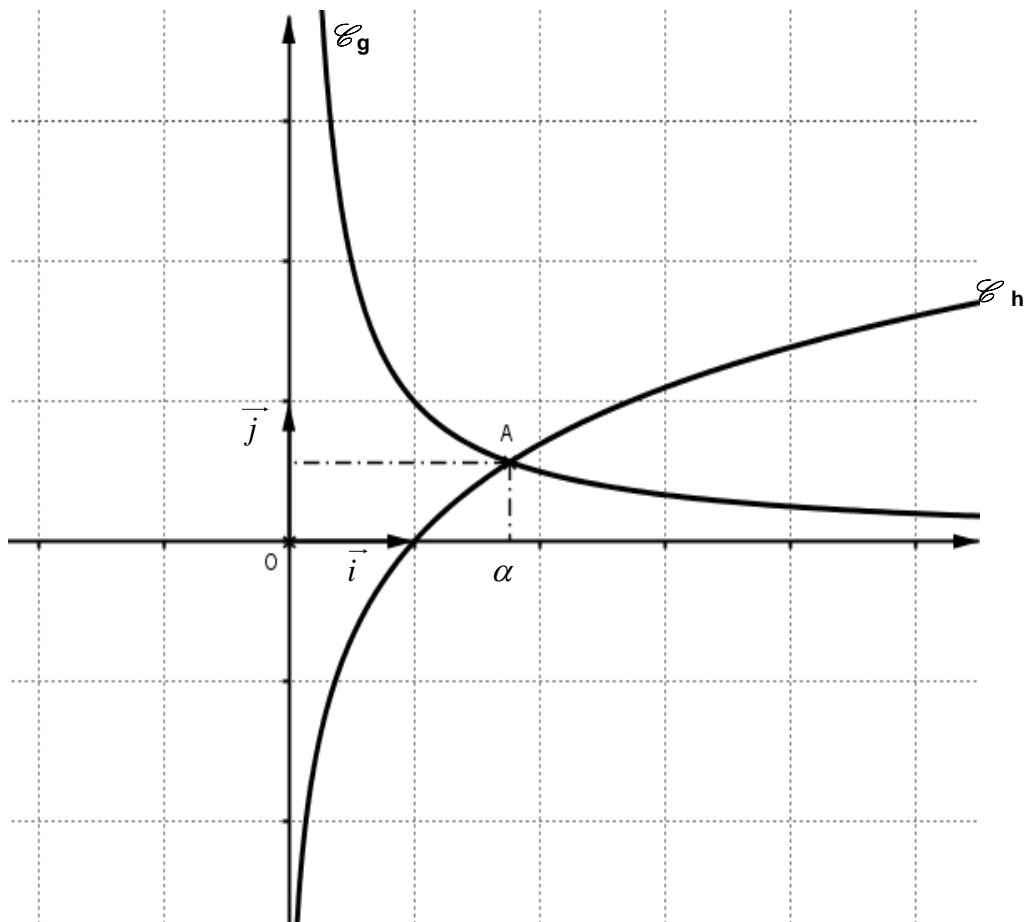
a ) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{f(x)}{x} \right)$  .

b ) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$  ,  $f'(x) = \frac{1}{x} - \ln x$  .

2 ) Dans l'annexe ci-jointe ,  $\mathcal{E}_g$  et  $\mathcal{E}_h$  sont les courbes représentatives dans un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  des fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = \frac{1}{x}$  et

$h(x) = \ln x$  .  $\mathcal{E}_g$  et  $\mathcal{E}_h$  se coupent au point  $A$  d'abscisse  $\alpha$  .



**Par une lecture graphique :**

- a) Donner le signe de  $f'(x)$  .
- b) Recopier et compléter le tableau de variation de  $f$  .

$x$	0		$\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		.....	0	.....	
$f(x)$					

- c) Déterminer l'ordonnée de A , en justifiant la réponse .
- 3) On désigne par  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$  .
- a) Montrer que  $f(\alpha) = \alpha + \frac{1}{\alpha} - 1$  .
  - b) Etudier la position relative des courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_h$  .