

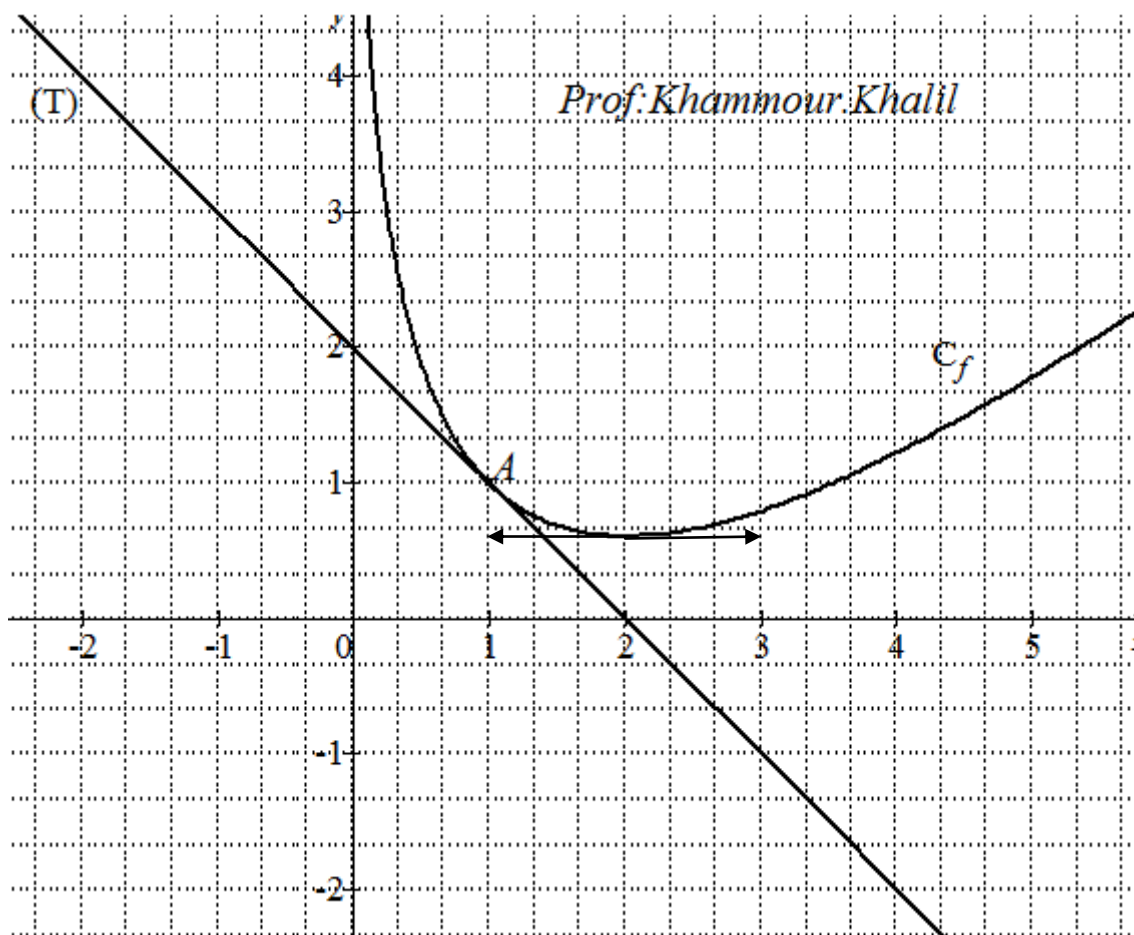
Exercice n°1 :

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^3 x}{x}$ 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\ln x}$ 3) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln x - \ln 3}{x - 3}$ 4) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - \ln e}{x - e}$
 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}$ 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x}$ 7) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ 8) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x$

Exercice n°2 :

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ dont on donne la représentation graphique C_f dans le repère ci-dessous.



On admet que :

- Le point A de coordonnées (1 ;1) appartient à la courbe C_f .
- La tangente (T) en A à la courbe C_f passe par le point de coordonnées (2 ;0).
- La courbe C_f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2.
- L'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f .

Partie A :

- 1) Donner ,par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$,où f' est la dérivée de f sur $]0,+\infty[$.
- 2) On admet que l'expression de $f(x)$ sur $]0,+\infty[$ est : $f(x) = ax + b + c \ln x$ où a , b et c sont des nombres réels.
 - a) Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a , b et c .
 - b) Démontrer que les réels a , b et c vérifient le système :
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + c = -1 \\ 2a + c = 0 \end{cases}$$
 - c) Déduire de la question précédente les valeurs de a , b et c , puis l'expression de $f(x)$.

Dans cette partie ,on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0,+\infty[$ par : $f(x) = x - 2 \ln x$

Partie B :

- 1) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe C_f .
- 2) Soit F la fonction définie pour tout réel $x \in]0,+\infty[$ par : $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2x \ln x$
 - a) Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
 - b) Calculer $F(1)$.

Exercice n°3 :

A) Soit g la fonction définie par : $g(x) = x - \ln x$

- 1) Déterminer le tableau de variation de g .
- 2) En déduire que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $g(x) \geq 1$.

B) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

et soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) a) Montrer que f est continue à droite en 0 .
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 .
- 2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = 2(g(x) - 1)$.
b) Dresser le tableau de variation de f .
c) Tracer C

Exercice n°4 :

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1 - \ln x}{x}$.

On note C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

- 1) Déterminer la limite de f en 0 . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) En remarquant que, pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]0, +\infty[$ on a :

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x},$$
déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat.
- 3) a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$.
b) Étudier le signe de $-2 + \ln x$ sur $]0, +\infty[$. En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.
c) Dresser le tableau de variation de f .
- 4) On note le point I le point d'intersection entre la courbe (C) et l'axe des abscisses, déterminer les coordonnées de point I .
- 5) On note (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 1 . Déterminer une équation de (T) .
- 6) Tracer la courbe (C) et la tangente (T) .
- 7) On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par : $g(x) = (\ln x)^2$.
a) Calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
b) En déduire une primitive de la fonction $\frac{\ln x}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice n°5 :

- 1) Soit g la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x + 1)$.
a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
b) Dresser le tableau de variation de g .
c) Calculer $g(0)$. En déduire le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.
- 2) On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x$ et soit (C_f) sa courbe représentative de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
a) Montrer que pour tout $x \in] -1, +\infty[$ $f'(x) = -\frac{g(x)}{(x+1)^2}$
b) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$
b) Étudier la position relative de (C_f) par rapport à Δ .
c) Tracer la courbe (C_f) .
- 4) Soit h la fonction définie sur l'intervalle $] -1, +\infty[$ par : $h(x) = [\ln(x + 1)]^2$.
a) Calculer $h'(x)$.
b) En déduire une primitive de f sur l'intervalle $] -1, +\infty[$.