

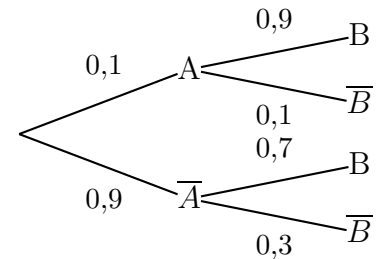
Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions, une seule des réponses A, B ou C est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1.

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre :

La probabilité de l'évènement $A \cup B$ est égale à :



A : 0,82

B : 0,72

C : 0,73

2. Soit X une variable qui suit une loi uniforme sur l'intervalle [0 , 2]. Alors on a :

A : $p(X = 0,5) = 0,25$ B : $p(0,5 \leq X \leq 0,8) = 0,3$ C : $p((0,2 \leq X \leq 0,7) | (X \geq 0,4)) = \frac{3}{16}$

3. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé. Soit \mathcal{P} la parabole d'équation $y^2 - 4x - 4 = 0$.

La tangente à \mathcal{P} au point A(8, 6) a pour équation dans ce même repère :

A : $3y - x = 10$

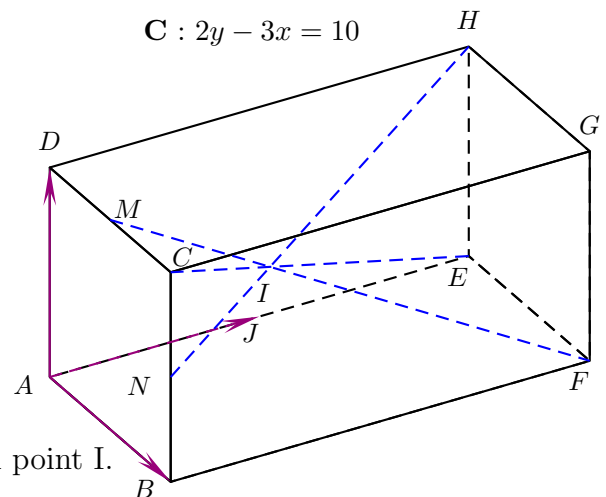
B : $2y - 9x = -60$

C : $2y - 3x = 10$

Exercice 2 (6 points)

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un parallélépipède droit tels que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$.

On désigne par M le milieu du segment [DC].



1. Montrer que les droites (CE) et (FM) sont sécantes en un point I.

2. On désigne par h l'homothétie de centre I qui transforme C en E.

(a) Déterminer les images des droites (CD) et (FM) par h. En déduire que $h(M) = F$.

(b) Prouver que h est de rapport -2.

3. Soit J le milieu du segment [AE]. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AD})$.

(a) Trouver une représentation paramétrique de chacune des droites (MF) et (CE).

(b) Déduire que I a pour coordonnées $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

(c) Soit $N(1, 0, \frac{1}{2})$. Montrer que $h(N) = H$.

4. Calculer le volume du tétraèdre IFEH. En déduire le volume du tétraèdre IMCN.

5. Soit \mathcal{S} l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{4}{3}z + \frac{8}{9} = 0$.

(a) Montrer que \mathcal{S} est une sphère dont on précisera le centre Ω et le rayon R.

(b) Vérifier que $I \in \mathcal{S}$.

(c) Montrer que \mathcal{S} est tangente au plan (ABC) en un point T que l'on précisera.

6. On pose $\mathcal{S}' = h(\mathcal{S})$. Montrer que \mathcal{S}' est tangente au plan (EFH) en un point T' qu'on précisera.

Exercice 3 (4 points)

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations : la destination A, la destination G et la destination M.

- 50 % des clients choisissent la destination A ;
- 30 % des clients choisissent la destination G ;
- 20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction. Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90 % des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80 % des clients ayant choisi la destination G. On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis. On note les évènements :

- A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A » ;
- G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G » ;
- M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;
- S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait » ;
- \bar{S} : « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.
2. (a) L'enquête montre que 72 % des clients de l'agence sont satisfaits. Calculer $P(A \cap S)$.
(b) En déduire $P(S | A)$.
3. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie.
Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G (on donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible).
4. On prélève successivement au hasard **cinq** questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants.

Calculer la probabilité de l'évènement : « au moins un questionnaire parmi les cinq est satisfait » (on donnera le résultat arrondi au millième).

Exercice 4 (7 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

A) On considère l'équation différentielle $(E) : y' + ny = x + \frac{1}{n}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E) .
2. Résoudre l'équation $(E') : y' + ny = 0$.
3. Montrer que la fonction h est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $h - g$ est solution de (E') .
4. En déduire les solutions de (E) .

B) Soit f_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$

1. (a) Vérifier que f_n est la solution de (E) qui prend la valeur -1 en 0.
(b) Etudier les variations de f_n .
2. (a) Montrer que l'équation, d'inconnue x , $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n strictement positive.
(b) Montrer que pour tout réel x positif, $e^x \geq x + 1$. En déduire le signe $f_n(1)$.
(c) Prouver que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < a_n < 1$.
3. (a) Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} [n(e^{a_n} - 1) - 1]$.
(b) Prouver que pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) > 0$.
(c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \geq 2}$ est décroissante et convergente.
4. On note $a = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$.
(a) Montrer que pour tout $n \geq 2$, $a \leq a_n$ puis $a_n \leq ne^{-na}$.
(b) En déduire que $a = 0$.