L.ALI Bourguiba K.K Prof :Raoudha Abdesslem Le 8/5/2013	Classe :4M2 Durée : 4heures **DEVOIR DE SYNTHESE N3**

Exercice1 :(2 points)

Répondre par vrai ou faux **en justifiant :**

1)soit a et b deux entiers non nuls on a : $a \wedge b = (2a+b) \wedge (a+b)$

2)la fonction f définie sur IR par $f(x) = 2\,e^{1-x}$ est une solution de $y' + y = 0$

3) soit a et b deux entiers naturels , si $ab \equiv 0 \pmod 6$ alors $a \equiv 0 \pmod 6$ ou $b \equiv 0 \pmod 6$

4)soit f et f_0 deux fonctions définies sur IR

Si f_0 et f sont solutions de $Y'' + Y = x$ alors $f - f_0$ est solution $Y'' + Y = 0$

Exercice2 :(3 points)

Le tableau suivant donne le taux d'équipement en récepteur numérique des ménages d'une certaine région de 2007 à 2012

Année	2007	2008	2009	2010	2011	2012
X :Rang de l'année	1	2	3	4	5	6
Y :taux en %	5	8	24	50	77	88

1)Représenter le nuage de points de la série (X , Y) , peut on pratiquer un ajustement affine ?

2)Déterminer les coordonnées du point moyen du nuage

3)Déterminer un ajustement affine de Y en X par la méthode de Mayer

4)Déduire en quelle année ce taux dépasse 95%.

Exercice3 :(4 points)

1)a)Trouver à l'aide de l'algorithme d'Euclide-Bezout une solution particulière de $17x - 12y = 1$

b)Résoudre dans Z , $17x \equiv 1 \pmod{12}$

c)Résoudre dans Z^2 , (E) : $17x - 12y = 3$

2)Soit x et y deux entiers et $N = 2 + 17x = 5 + 12y$

a)Montrer que x et y sont solutions de (E)

b)Déduire que $N \equiv 53 \pmod{204}$

3)Montrer que si $N \equiv 53 \pmod{204}$ alors $\begin{cases} N \equiv 2 \pmod{17} \\ N \equiv 5 \pmod{12} \end{cases}$

4)Une bande de 17 pirates s'est emparée d'un butin composé de n pièces d'or , $n \in [400 , 500]$, d'égales valeurs. Ils décident de les partager également et donner le reste au cuisinier chinois , celui-ci recevra alors 2 pièces . Mais les pirates se querellent et 4 d'ente eux sont tués , le cuisinier recevrait alors 5 pièces.

Déterminer le nombre de pièces . (Justifier)

Exercice4 :(4 points)

Un constructeur automobile achète des pneus à 3 fournisseurs dans les proportions suivantes :

20% au premier fournisseur , 50 % au deuxième fournisseur et 30 % au troisième fournisseur .

Le premier fournisseur fabrique 90 % de pneus sans défaut , le second fournisseur fabrique 95 % de pneus sans défaut et le troisième fournisseur fabrique 80 % de pneus sans défaut

Tous les résultat seront donnés à 10^{-3} prés

1)On choisit un pneu au hasard dans la livraison

a)Déterminer la probabilité que le pneu soit sans défaut

b)Le pneu choisi étant sans défaut ,qu'elle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur

2)On considère un lot de 20 pneus

a)Déterminer le nombre moyen de pneus défectueux

b)Déterminer la probabilité qu'un pneu au plus soit défectueux

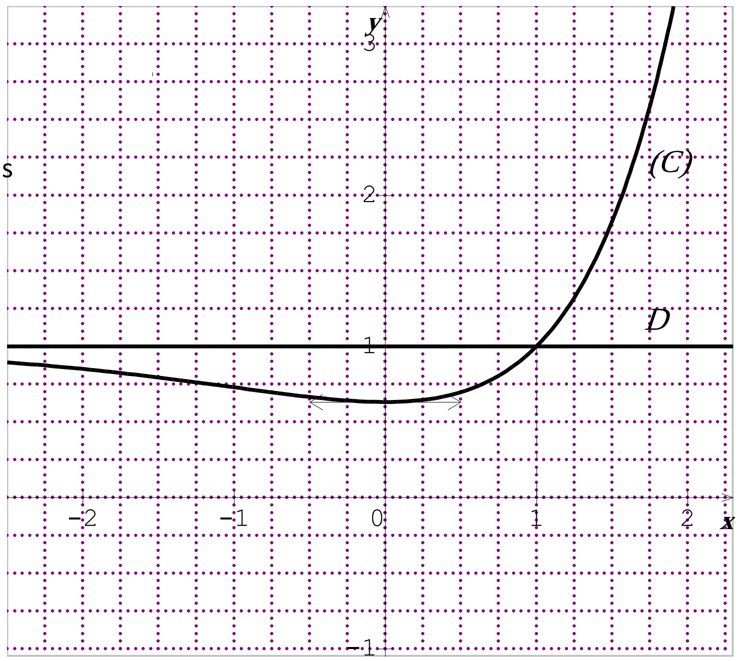
3)La durée de vie en Km d'un pneu est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre 2.10^{-5}

a)quelle est la densité de probabilité de cette loi

b)Quelle est la probabilité qu'un pneu dure moins de 50000 Km ?

c)Quelle est la probabilité qu'un pneu dure plus que 100 000 Km ?

Exercice5:(7 points)



1)La courbe (C) à côté est celle d'une fonction f définie

Sur IR par f(x) = (ax + b)$e^{\,x-1}$ + c où a , b et sont des réels

La droite D : y = 1 est une asymptote à (C)

(C) admet au point d'abscisse 0 une tangente horizontale

a)Dresser le tableau de variation de f

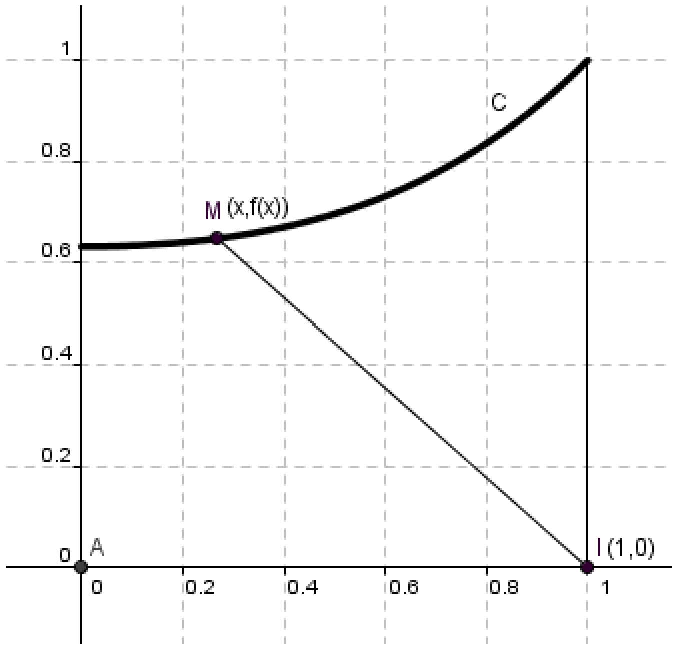
b)Calculer f '(x)

c)Justifier que a = 1 , b = - 1 et c = 1

2)Donc f(x) = (x - 1) $e^{\,x-1}$ + 1

Soit A la région du plan délimité par (C), et les droites

d'équations y = 0 , x = 0 et x = 1 et soit **I (1,0)**



On se propose de montrer qu'il existe un seul point M ∈ (C)

tel que [IM] partage A en 2 régions de même aire

Soit pour tout x ∈ [0 , 1] , M(x , f(x)) et Δ_x la région du plan

délimité par (C) , [IM] et les droites d'équations x = 0 et y = 0

Soit g(x) = aire (Δ_x) et F(x) = $\int_o^x f(t)dt$

a)Calculer l'aire de A

b)Montrer que g(x) = F(x) + $\frac{1}{2}$ (1-x) f(x)

c)sans calculer g(x) , étudier les variations de g

d)Déduire qu'il existe un seul $\alpha \in [0,1]$ tel que g(α) = $\frac{1}{2}$ aire(D)

3)Soit pour tout n ∈ IN*, $U_n = \int_1^2 (x-1)^n\, e^{x-1}\, dx$ et Soit $G(x) = \int_1^{1-2lnx} (t-1)^n\, e^{t-1}\, dt$, $x > 0$

a)Calculer U_1

b)Montrer que $U_{n+1} = e - (n+1)U_n$ et déduire U_2 , U_3 et U_3

c)Montrer que G est dérivable sur]0,+∞[et que G'(x) = $(-2)^{n+1}\,\frac{(lnx)^n}{x^3}$

d)Montrer que G(x) = $(-2)^{n+1} \int_1^x \frac{(lnt)^n}{t^3}\, dt$ et déduire $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{(lnt)^4}{t^3}\, dt$

Exercice 1 :

1) Vrai en effet soit d= a$\wedge b$ et $d' = (a+b) \wedge (2a+b)$

On a d divise a et b donc d divise a+b et d divise 2a + b donc d divise $d' = (a+b) \wedge (2a+b)$

Et d' divise a+b et 2a+b donc d' divise (2a+b)-(a+b)=a et d' divise 2(a+b) –(2a +b) =b donc d' divise d = a$\wedge b$ Donc d=d'

2)Vrai en effet f'(x) = -2e^{1-x} donc f'(x) +f(x) =0 donc f est une solution de y' + y =0

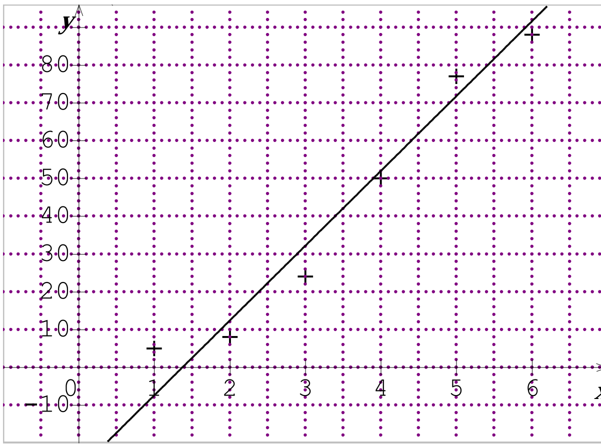
3)faux 12=3.4 est un ultiple de 6 mais 3 n'est pas un multiple de 6 et 4 n'est pas un multiple de 6

4)Vraie en effet f et f_0 sont solutions de y''+y =x donc f''(x) +f(x) = x et f''(x)+ f(x) = x donc f''(x) +f(x) –f_0''(x) –f_0(x) =0

Donc (f-f_0)''(x) +(f-f_0)(x) = 0 donc f-f0 est une solution de y''+ y = 0

Exercice2

1)Le nuage de points est allongé donc on peut pratiquer un ajustement affine



2)G(3.5 ;42)

3)G_1(2 ;12,33) et G_2(5,71.67) , (G_1G_2) :y = ax +b

a = $\frac{71.67-12.33}{5-2}$ = 19.78 , b = 12.33- 1978.2 = -27.23

4)y > 95 eq 1978x - 27.23 > 95 eq x > 6.18

Donc à partir de 2013 ce taux dépasse 95%

Exercice 3

1)a)

quotient		1	2	2	1
0	1	1	3	7	17
1	0	1	2	5	12

reste	17	12	5	2	1
quotient		1	2	2	1

On a 17.5-12.7 =1 donc (5,7) est une solution de 17x-12y =1

b)on a 17.5 ≡ 1 (mod 12)

17.x≡ 1(mod 12) donc 17x≡ 17 .5 (mod 12) donc 17(x-5) ≡0(mod 12) donc 12 divise 17(x-5) et 12∧17 =1

Donc 12 divise (x-5) donc x -5 =12.k avec k entier donc x=12.k +5

Réciproquement si x= 12k +5 alors 17x =17.12k +17.5 ≡1 (mod 12) Donc S = {12k +5 , k entier }

c)(15 ,21) est une solution particulière donc 17.15 -12 .21 =17x-12y donc17(x-15)=12(y-21) donc 17 divise 12(y – 21)

or 17 et 12 sont premiers entre eux donc 17 divise y -21 donc y-21 =17k , k entier donc y =17k+21

par suite 17(x-15) = 12 .17k eq x-15 = 12k eq x = 12k+15 donc S ={(12k +15,17k +21), k entier }

2)a)2 +17x = 5 +12y donc 17x -12y =3 donc (x,y) est solution de (E)

b)x=12k+15 donc N = 2 +17 x = 2+17 (12k +15)=2+204 k+255 =257 +204 k =53 +204 +204k ≡ 53 (mod 204)

3)on suppose que N ≡ 53 (mod 204) donc N =53 +204k' donc N -2 =51 -204 k' =17(12k + 3)≡ 0(mod 17) et

N -5 =48 +204 k'=12(4 +17k')≡0(mod 12) donc N ≡2(mod 17) et N ≡ 5(mod 12)

4)n≡2(mod 17) et n ≡ 5 (mod 12) eq n ≡ 53 (mod 204) eq n = 53 +204 k'' et n ∈ [400,500] donc n=53 +204.2 =461

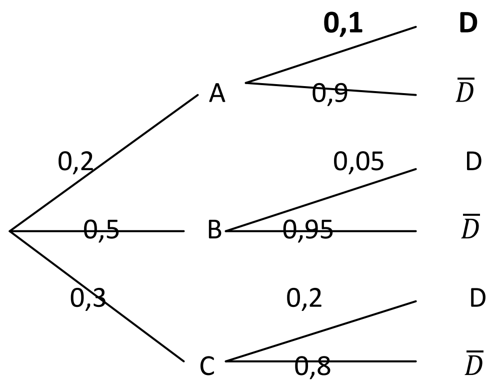
Exercice 4 :

1)Soit A « le pneu est fabriqué par A »

B « le pneu est fabriqué par B »

C « le pneu est fabriqué par C »

D « le pneu est défectueux »



a)p($\overline{D}$)=0,2.0,9+0,5.0,95+0,3.0,8 =0,895

b)p(A/$\overline{D}$)= $\frac{p(A\cap\overline{D})}{p(\overline{D})}$ =0,201

2)Soit X l'aléa numérique égale au nombre de pneus défectueux ,X suit une li binomiale de paramètres(20,0,105)

a)E(X) 20.0,105=2,1 b)p(X=0)+p(X=1) =0,364

3)a)f(x)=210^{-5} $e^{-2.10^{-5}x}$ b)p(X<50000) =1-e^{-1} c) p(X> 100000)=e^{-2}

Exercice5:

1)a) b)f'(x) = (ax +b +a)e^{x-1}

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)	-		+
f(x)	1 ↘	f(0)	↗ $+\infty$

c)f(1)=1 donc a+b +c =1 ,f'(0)=0 donc b+a =0 et f'(1)=1 donc 2a+b =1 on trouve a=1,b=-1et c =1

2)a)aire(A)=$\int_0^1 (x-1)e^{x-1} + 1)dx$ = $[(x-1)e^{x-1}]_0^1$ – $\int_0^1 e^{x-1}dx$ + 1 =2e^{-1}

b) Soit H le projeté orthogonal de M sur (o,$\vec{\imath}$),soit Δ_1 le domaine limité par (C), (o,$\vec{\imath}$), (o,$\vec{\jmath}$)et (HM)

on a g(x) = aire(Δ_1) +aire (MHI) = F(x) + $\frac{1}{2}$ (1-x) f(x)

c)g'(x) = f(x)+$\frac{1}{2}$ (1-x)f'(x) -$\frac{1}{2}$ f(x) =$\frac{1}{2}$ f(x) +$\frac{1}{2}$ (1-x)f(x) > 0

x	0	1
g'(x)	+	
g(x)	$\frac{1-e^{-1}}{2}$ ↗	$2e^{-1}$

d)g est continue et strictement croissante sur [0,1] donc elle réalise une bijection de [0,1] sur

g([0,1]) = [$\frac{1-e^{-1}}{2}$, $2e^{-1}$]

0,5.aire(A)=e^{-1} ∈ [$\frac{1-e^{-1}}{2}$, $2e^{-1}$] donc il existe un unique $\alpha \in$ [0,1] tel que g(α) = $\frac{1}{2}$ aire(A)

3)$U_1 = \int_1^2 (x-1)e^{x-1}\,dx = [(x-1)e^{x-1}]_1^2 - \int_1^2 e^{x-1}dx = 1$

$U_{n+1} = [(x-1)^{n+1}e^{x-1}]_1^2 - \int_0^1 (n+1)(x-1)^n e^{x-1}dx = e - (n+1)U_n$

U_2=e - 2 , U_3 = -2e +6 , U_4 = 9e - 24

c)soit u(x) = 1- 2lnx , $f_n(t) = (t-1)^n\ e^{t-1}$

u est dérivable sur]0,+∞ [, f_n est continue sur IR donc G est dérivable sur]0,+∞ [et

$G'(x) = u'(x).f(u(x)) = \frac{-2}{x}(-2lnx)^n e^{-2lnx} = \frac{-2}{x^3}(-2)^n(lnx)^n = \frac{(-2)^{n+1}(lnx)^n}{x^3}$

d)$G'(x) = \frac{(-2)^{n+1}(lnx)^n}{x^3}$ et G(1) =0 donc $G(x) = (-2)^{n+1}\int_1^x \frac{(lnt)^n}{t^3}\,dt$

pour n =4 et $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ on a $\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{(lnt)^4}{t^3}\,dt = \frac{1}{(-2)^5}\,G\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{-1}{32}\int_1^{1-2ln\frac{1}{\sqrt{e}}}(t-1)^4\,e^{t-1}\,dt = \frac{-1}{32}U_4$