CORRECTION DU DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1(3pts)

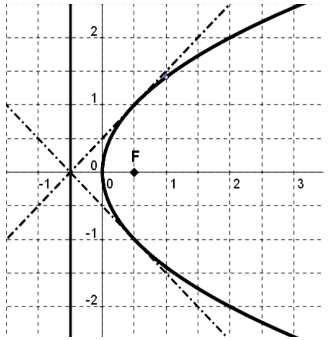
1) a) ; 2) c) ; 3) b)

Exercice 2 (4pts)

1) P : $y^2 = 2x$

a) $F\left(\frac{1}{2},0\right)$ et D : $x = -\frac{1}{2}$

b) (voir figure)



c) On a $M\left(\frac{t^2}{2},t\right)$, $M'\left(\frac{1}{2t^2},-\frac{1}{t}\right)$ et $F\left(\frac{1}{2},0\right)$

donc $\overrightarrow{MF}\begin{pmatrix}\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\\ t\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{M'F}\begin{pmatrix}\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{t}\end{pmatrix}$

$\text{dét}\left(\overrightarrow{MF},\overrightarrow{M'F}\right) = -\frac{1}{t}\left(\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\right) - t\left(\frac{1}{2t^2}-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{t}{2}+\frac{1}{2t}-\frac{1}{2t}+\frac{t}{2} = 0$

$\overrightarrow{MF}$ et $\overrightarrow{M'F}$ sont colinéaires et, donc M, M' et F sont alignés.

2) **a)** T : $y.y_M = p(x + x_M) \Rightarrow$ T : $y = \frac{1}{t}\left(x+\frac{t^2}{2}\right)$

$\Rightarrow$ **T :** $\boldsymbol{y = \frac{1}{t}x + \frac{t}{2}}$

De même **T' :** $\boldsymbol{y = -t\,x - \frac{1}{2t}}$

T⊥T' car $-t \times \frac{1}{t} = -1$

b) On pose $H(x_H, y_H) \in T\cap T'$. On a donc $\frac{1}{t}x_H + \frac{t}{2} = -t\,x_H - \frac{1}{2t}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{t}+t\right)x_H = -\frac{1}{2t}-\frac{t}{2} = -\frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow \frac{t^2+1}{t}x_H = -\frac{t^2+1}{2t} \Rightarrow x_H = -\frac{1}{2}$

Ainsi, si t décrit IR*, H décrit la directrice D.

Exercice 3 (4pts)

1) **a)** $6^5 = 7776 = 11 \times 706 + 10 \Rightarrow 6^5 \equiv 10(mod\ 11)$

$\Rightarrow 6^5 \equiv -1(mod\ 11)$ ou encore $6^{10} \equiv 1(mod\ 11)$

b) $6^2 = 36 \equiv 1(mod\ 5) \Rightarrow 6^4 \equiv 1(mod\ 5)$

c) $6^{10} \equiv 1(mod\ 11) \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 11)$

$6^4 \equiv 1(mod\ 5) \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5)$

d) $\begin{cases} 6^{40} \equiv 1(mod\ 11) \\ 6^{40} \equiv 1(mod\ 5) \\ 5 \wedge 11 = 1 \end{cases} \Rightarrow 6^{40} \equiv 1(mod\ 5 \times 11)$

$\Rightarrow 6^{40} - 1 \equiv 0(mod\ 55)$

2) **a)** $65 \wedge 40 = 5 \neq 1$ donc (E) n'admet pas de solutions.

b) $17 \wedge 40 = 1$ donc (E') admet au moins une solution.

c) Remarquons que $(-7,-3)$ est une solution particulière de (E').

(Algorithme d'euclide)

$\begin{cases} 17\,x - 40y = 1 \\ 17 \times (-7) - 40 \times (-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 17(x+7) = 40(y+3)$

$\Rightarrow$ 17 divise $(y+3)$ et 40 divise $(x+7)$ car $17 \wedge 40 = 1$

$\Rightarrow y = 17k - 3$ et $x = 40k - 7$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Inversement ; Si $x = 40k - 7$ et $y = 17k - 3$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

$17(40k - 7) - 40(17k - 3) = -119 + 120 = 1$.

Ainsi $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(40k-7\,,17k-3); k \in \mathbb{Z}\}$

Pour k = 1, (33 , 14) est une solution de (E') c'est-à-dire

$17 \times 33 - 40 \times 14 = 1 \Rightarrow 17 \times 33 = 40 \times 14 + 1$ ou encore

$17 \times 33 \equiv 1(mod\ 40)$ et par suite 33 est l'inverse modulo 40 de 17.

Exercice4 (10pts)

1) a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\ln x}{x+1} = 0 = f(0)$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(x)}{(x+1)} = -\infty$. F n'est pas dérivable à gauche en 0 et (C) admet au point O une demi-tangente verticale dirigée vers le bas.

2) a) g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x>0$;

$g'(x) = 1+\frac{1}{x} > 0\ \forall\, x>0$. ainsi g est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

b) g est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$.donc l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution $\alpha>0$. De plus $g(0.27)\approx -0.03<0$

$g(0.28)\approx 0.07>0$

donc $0{,}27<\alpha<0{,}28$.

c)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

3) a) $x\mapsto x\ln x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, $x\mapsto x+1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$, de plus $\forall\, x>0$, $x+1\neq0$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $\forall\, x>0$; $f'(x) = \frac{(\ln x + x.\frac{1}{x})(x+1) - x\ln x)}{(x+1)^2}$

$= \frac{x\ln x+\ln x+x+1-x\ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) Le signe de f′ est le signe de g(x).

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

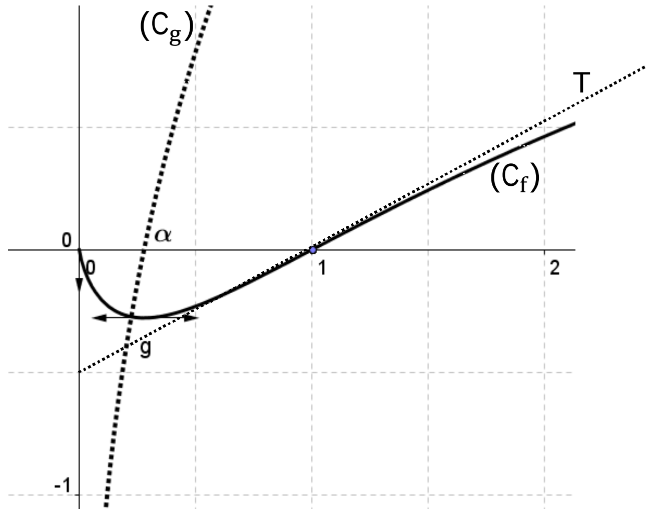
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x\ln x}{x+1}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$

4) a) T : $y = f'(1)(x-1)+f(1) = \frac{1}{2}(x-1)+0 = \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

T : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}.\frac{x}{x+1} = 0$



I)

1) $x\mapsto 2x$ est dérivable sur $[0,+\infty[$

$x\mapsto f(x)$ est Continue sur $[0,+\infty[$

Donc F est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x\geq0$;

$F'(x) = 2\,f(2x)$.

2) **a)** $\forall\, t\geq1$

$f(t)-t\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - t\ln t = (t\ln t)\left(\frac{t}{t+1}-1\right)$

$= (t\ln t)\left(\frac{-1}{t+1}\right)\leq 0$

$f(t)-\frac{1}{2}\ln t = \frac{t\ln t}{t+1} - \frac{1}{2}\ln t = (\ln t)\left(\frac{t}{t+1}-\frac{1}{2}\right)$

$= (\ln t)\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\geq 0$

Ainsi $\forall\, t\geq 1$; $\frac{1}{2}\ln t\leq\ f(t)\ \leq t\ln t$.

b) $I(x) = \int_1^{2x} \ln t\, dt \quad = \left[\; t\ln t - t \;\right]_1^{2x} = 2x\ln 2x - 2x + 1$

$J(x) = \int_1^{2x} t\ln t\, dt$

On pose $\begin{cases} u(x) = \ln t \\ v'(x) = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{t} \\ v'(x) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$

Alors $J(x) = \left[\frac{t^2}{2}\ln t\right]_1^{2x} - \int_1^{2x} \frac{t}{2} dt = 2x^2 \ln 2x - \frac{1}{4}\left[\; t^2 \right]_1^{2x}$

$= 2x^2 \ln 2x - x^2 + \frac{1}{4}.$

c) On a $\forall$ t $\in [1, x]$; $\frac{1}{2}\ln t \le f(t) \le t\ln t$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_1^{2x} \ln t\, dt \le \int_1^{2x} f(t)dt \le \int_1^{2x} t\ln t\, dt$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} I(x) \le F(x) \le J(x)$ et par suite

$x\,ln(2x) - x + \frac{1}{2} \le F(x) \le 2x^2 \ln(2x) - x^2 + \frac{1}{4}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\,ln(2x) - x + \frac{1}{2} = \lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x}) = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\,ln(2x) - x + \frac{1}{2}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(2x) - 1 + \frac{1}{2x} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{x} = +\infty$

3) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et pour tout $x \ge 0$; $F'(x) = 2\,f(2x)$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x\ln(2x)}{2x+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $\ln 2x = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$

x	0		1/2		$+\infty$
F'(x)	0	–	0	+	
F	0,2	↘	0	↗	$+\infty$

F admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$.