A. *Définition et propriétés :*

Définition : *Soit k un réel strictement positif .Toute application du plan dans lui-même telle que pour tous A et B d'image respectives A' et B' par f, on a* $AB = kA'B'$ *est appelée une similitude de rapport* k

Exemple : 1) *Toute isométrie est une similitude de rapport k=1.*
2) Toute homothétie de rapport $k \neq 0$ *est une similitude de rapport* $|k|$.

- ***Théorème 1 :***

Si f est une similitude de rapport k et g est une de rapport k' alors **fog** *est une similitude de rapport kk'.*

- ***Théorème 2 :***

Soient h une homothétie de rapport k et h' une homothétie de rapport k' alors :

- *Si* $kk' = 1$ *alors* ***hoh'*** *est une translation.*
- *Si* $kk' \neq 1$ *alors* ***hoh'*** *est une homothétie de rapport kk'.*

Théorème : *Les similitudes sont les composées des isométries et des homothéties.*

Théorèmes :

- *Une similitude de rapport k est bijective et sa réciproque est une similitude de rapport* $\frac{1}{k}$ *en effet ; A'B'=kAB* $\Leftrightarrow$ *AB=*$\frac{1}{k}$ *A'B' (k*$\neq 0$)
- *Les similitudes conservent l'alignement.*
- *Les similitudes conservent le parallélisme et l'orthogonalité.*
- *Les similitudes conservent le barycentre et en particulier le milieu.*
- *Une similitude transforme un cercle de centre O et de rayon R en un cercle de centre O'=f(O) et de rayon R'=kR et conserve le contact.*
- *Soient A,B,C,D ,E et F six points d'images respectives par une similitude de rapport k A',B',C',D',E' et F' si* $\overrightarrow{EF} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{CD}$ *alors* $\overrightarrow{E'F'} = a\overrightarrow{A'B'} + b\overrightarrow{C'D'}$ *et* $\overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{C'D'} = k^2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$

Théorème:
Deux similitudes qui coïncident sur trois points non alignés coïncident sur tout le plan.

B. *Similitude directe - similitude indirecte :*

Définition :

- *On dit qu'une similitude est directe si elle est la composée d'une homothétie et d'un déplacement.*

- *On dit qu'une similitude est indirecte si elle est la composée d'une homothétie et d'un antidéplacement.*

Conséquences :

- *Toute similitude directe conserve les mesures des angles orientés.*
- *Toute similitude indirecte transforme les mesures des angles orientés en leurs opposées.*

Théorèmes:

- *La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.*
- *La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.*
- *La composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe est une similitude indirecte.*
- *La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.*
- *La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.*

Théorèmes:

Soit A, B, C et D des points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$

- *Il existe une unique similitude directe qui envoie A sur C et B sur D.*
- *Il existe une unique similitude indirecte qui envoie A sur C et B sur D.*

1. ***Similitude directe:***

Angle d'une similitude directe :

Théorème et définition :

Soit f une similitude directe alors il existe un réel θ , appelé l'angle de la similitude qui vérifie : pour tout points A et B d'image respectives A' et B' par f , on a $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta[2\pi]$

Théorème:

Toute similitude directe de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Vocabulaire et notation :

- *Si f est une similitude directe de centre I , de rapport k et d'angle θ on note $f = S_{(I,k,\theta)}$ ou I, k, θ sont les éléments caractéristiques de f*
- *Si $f = S_{(I,k,\theta)}$ alors pour tout point $M \neq I$ d'image M' par f , on a :*

$$f(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM' = IM \\ \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$$

- $S_{(I,k,\theta)} o S_{(I,k',\theta')} = S_{(I,kk',\theta+\theta')}$

- Si $f = S_{(I,k,\theta)}$ alors $f^{-1} = S_{(I,\frac{1}{k},-\theta)}$

Théorème:
Toute similitude directe de centre I , de rapport k et d'angle θ se décompose sous la forme $f = hor = roh$ où h est l'homothétie de centre I et de rapport k et r est la rotation de centre I et d'angle θ cette décomposition s'appelle forme réduite de f .

2. ***Similitudes indirectes :***

Théorème et définition :
Une similitude indirecte de rapport $k \neq 1$ admet un unique point fixe, appelé centre de la similitude.

Théorème:
Toute similitude indirecte f de centre A , de rapport $k \neq 1$, se décompose de façon unique sous la forme : $f = HoS_{\Delta} = HoS_{\Delta}$ où $H = h_{(A,k)}$ et Δ passe par A. cette écriture s'appelle forme réduite de f et Δ est son axe

Conséquence :
Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors fof est une homothétie de centre I et de rapport k^2

3. ***Similitude –complexe :***

Théorème :
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $O,\vec{u},\vec{v})$ .Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.

- *L'application f est une similitude directe de centre I , de rapport $k \neq 1$ et d'angle θ* ***ssi*** *il existe deux nombres complexes a et b tels que z ' = az + b avec $a = ke^{i\theta}$ et $Z_I = \frac{b}{1-a}$ est l'affixe de I .*
- *L'application f est une similitude indirecte de centre I , de rapport $k \neq 1$* ***ssi*** *il existe deux nombres complexes a et b tels que z ' = $a\overline{z}$ +b dans ce cas k = |a| et $Z_I = \frac{a\overline{b}+b}{1-|a|^2}$ est l'affixe de I .*