L.S.Jammel 3	Devoir de Contrôle 1	Afli Ahmed
07/11/2013	Durée :2h	4 Maths

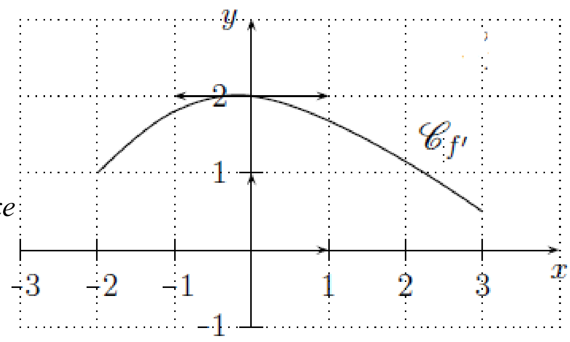
<u>NB : Il sera tenu compte de la rédaction et la rigueur de raisonnement :☺</u>

Exercice 1 :

Soit f une fonction deux fois dérivables sur [-2:3]

La courbe ci-contre est celle de f ' (fonction dérivée de f)

Répondre par ***Vrai*** *ou* ***Faux*** *<u>en justifiant la réponse</u>*



- *1./* $f(-1) < f(2)$
- *2./ La courbe* (C_f) *admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses*
- *3./* $|f(3) - f(-2)| \leq 10$
- *4./ f réalise une bijection de [-2,3] sur f([-2,3])*

Exercice 2 :

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = U_n + Cos(U_n) \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$

1. / Montrer que la fonction $f : x \mapsto x + cos(x)$ *est croissante sur R .*

2. / a. Montrer par récurrence que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$

b. Etudier la monotonie de (U_n).

c. En déduire que (U_n) *est convergente et déterminer sa limite.*

3. / a. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} cos(U_k) = U_{n+1}$

b. Calcule $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} cos(U_k)$

4. / x un réel donné,

Développer $(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^2$ *puis déduire que* $cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{cos(x)+1}{2}$

5. / Pour tout n de $\mathbb{N}$*, on pose* $V_n = -\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} cos^2(\frac{U_k}{2})$

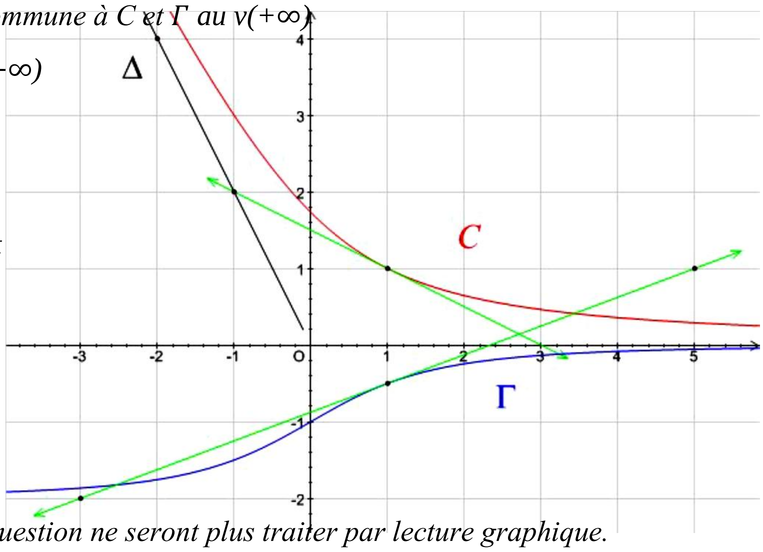
a. Montrer que pour tout n $\in \mathbb{N}$, $V_n = \frac{U_{n+1}}{2(n+1)}$

b. Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} V_n$ *et* $\lim_{n\to+\infty} nV_n$.

Exercice 3:

Dans la figure ci-contre :

- *C est la courbe représentative dans un repère orthonormé d'une fonction f ,*
- *Γ est la courbe de sa fonction dérivée .*
- *L'axe des abscisses est une asymptote commune à C et Γ au v(+∞)*
- *La droite Δ est une asymptote à C au v(−∞)*



A.) *Par lecture graphique, déterminer :*

1./ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$

2./ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f\circ f(x)}{f(x)}$ et

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)+2x+1)$

3./ *f(1) , f '(1) et f ''(1)*

B.) *On donne f(x) =* $\sqrt{x^2+3}-x$

***N.B** : Dans la suite de l'exercice toutes les question ne seront plus traiter par lecture graphique.*

1. / a. *Calculer f '(x) pour* $x \in \mathbb{R}$

b. *Calculer f ''(x) pour* $x\in\mathbb{R}$ *et en déduire que f ' est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$

c. *En appliquant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout* $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ *on a :*

$$|f(x)-1| \leq \frac{3}{4}|x-1|$$

2. / *Soit la fonction g continue sur [0,1] , dérivable sur]0,1[tel que : g(0) = 1 et g(1) =* $\sqrt{3}$

a. *Montrer qu'il existe au moins un réel a ∈]0,1[tel que f(a) = g(a)*

b. *Monter qu'il existe au moins un réel b ∈]0,1[tel que f ' (b) = - g '(b)*

3. / *On pose u(x) = x.sin(* $\frac{2}{x}$ *)   et   v(x) =* $-\frac{1}{x^2} + \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

a. *A l'aide des théorèmes de comparaison, étudier les limites en 0 des fonctions u et v.*

b. *Calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} (u\circ f)(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} (f\circ v)(x)$.

Exercice 4 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ *,on donne les points A(2i) et B(i)*

Soit l'application $f\backslash\{B\} : P \to P$, *tel que* $z' = \frac{iz+2}{z-i}$

$M(z) \longmapsto M'(z')$

1. / *Déterminer les points invariants par l'application f et exprimer leurs affixes sous forme algébrique et trigonométrique*

2. / a. *Montrer que pour tout* $z \neq i$ *et* $z \neq 2i$, $|z'| = \frac{AM}{BM}$ *et* $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})[2\pi]$

b. *Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M(z) tel que* $|z'| = 1$

c. *Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M(z) lorsque M ' décrit la droite* $(O,\vec{v})\backslash\{O\}$

3. / a. *Calculer (z'-i)(z-i) pour* $z \neq i$

b. *En déduire l'image, par f, du cercle* $\mathscr{C}$ *de centre B et de rayon* $\frac{1}{2}$.

Avec mes encouragements