I- Exercices d'applications

1. Pour commencer

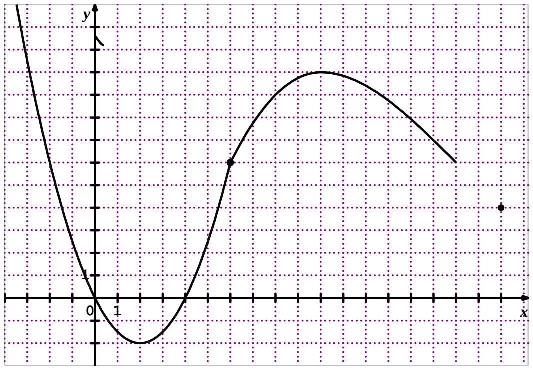
a. Ensemble de définition :

Pour quelles valeurs de x, f est –elle définie :

a/ $f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$ ***b/*** $f(x)=\frac{x+1}{x^2-2x+1}$ ***c/*** $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

d/ $f(x)=\frac{x^2+1}{\sqrt{2-x}}$ ***e/*** $f(x)=|x-1|-|2x+1|$ ***f/*** $f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{x+2}}$

b. Images et antécédents



$\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f.

1. a. Donner l'ensemble de définition de f.

b. Lire les images de : 2 ; 6 ; 8 ; 0 et 4.

c. Lire les antécédents de : 0 et 6.

2. a. Donner l'ensemble des abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de l'axe des abscisses.

b. Quels sont les réels égaux à leurs images.

c. Donner le tableau des variations de f.

2. Sens de variation

Dans chaque cas, dessiner la courbe représentative d'une fonction ayant le tableau de variations.

x	-2		1		$+\infty$
f	-1	↗	3	↘	$-\infty$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

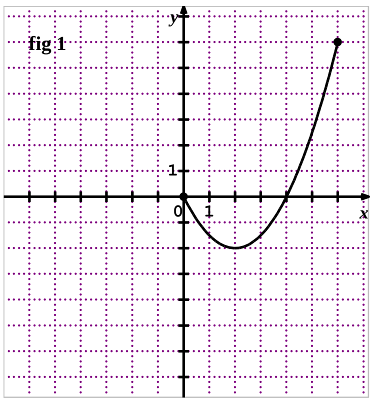
3. Parités

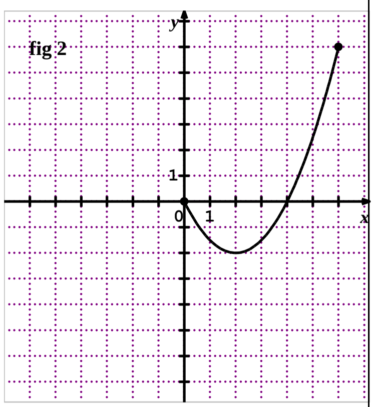
1. a. La fonction f, définie sur [-6, 6] est partiellement représentée **(fig1)**, est impaire compléter la courbe de f.

b. Dresser le tableau de variation de f.

2. a. La fonction g, définie sur [-6, 6] est partiellement représentée **(fig2)**, est paire compléter la courbe de g.

b. Dresser le tableau de variation de g





3. Étudier la parité des fonctions f définies sur IR par :

a/ $f(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$ **b/** $f(x)=5x^3-x$ **c/** $f(x)=2x^2+x$

5. Fonctions affines par intervalle (par morceaux)

On considère la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=-x-1 & \text{si } x\le -1 \\ f(x)=0 & \text{si } -1<x\le 3 \\ f(x)=x-3 & \text{si } 3<x \end{cases}$

1. Construire $\mathcal{C}_f$.

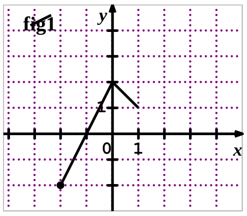
2. Résoudre graphiquement, les équations :

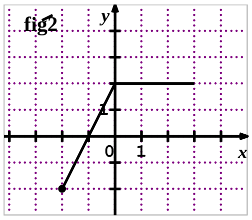
a. $f(x)=1$ **b.** $f(x)=x$ **c.** $f(x)=-3$

3. Soit *g* la fonction définie par $g(x) = f(|x|)$. Représenter $\mathcal{C}_g$.

4. Définir la fonction *h* dont sa représentation graphique est donnée par ***(fig 1)*** :

5. Définir la fonction *k* dont sa représentation graphique est donnée par ***(fig 2)*** :





6. Fonction partie entière :

On a $f(x) = x - E\left(\frac{x}{2}\right)$

1/ Donner les expressions de *f(x)* dans l'intervalle [-2, 2].

2/ Tracer $\mathcal{C}_f$.

7. Operations sur les fonctions

Donner les variations de chacune des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -2x + 1 + \frac{3}{x}$ sur $]0, +\infty[$ **b.** $g(x) = x - 1 + \sqrt{x-1}$ sur $]1, +\infty[$

II- Exercices de synthèse

Exercice n°1 :

Soit la fonction *f* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{-1}{x+1}$

1. a/ Étudier les variations de *f* sur$]-\infty, -1[$et$]-1, +\infty[$.

b/ Traces $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

c/ Résoudre graphiquement l'inéquation $-2 \leq f(x) \leq 2$.

2. Soit la fonction *g* définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $g(x) = \frac{-3-x}{1+x}$.

a/ Montrer que $g(x) = -1 - \frac{2}{x+1}$.

b/ Déduire $\mathcal{C}_g$ dans le même repère (couleur différente)

c/ Dresser le tableau de variation de g.

3. Soit la fonction $h(x) = \frac{|x|-3}{1-|x|}$.

a/ Écrire *h(x)* sans valeur absolue pour $x \in]-\infty, 0] \setminus \{-1\}$.

b/ Trace $\mathcal{C}_h$ dans le même repère (couleur différente).

Exercice n°2 :

Soit la fonction $f : IR \mapsto IR$ $\quad x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x| + 1}$

1. a/ Montrer que *f* est une fonction affine par intervalles.

b/ Construire $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthonormé.

c/ *f* admet elle un majorant ? Un minorant ?

2. Résoudre graphiquement :

a/ $f(x) = 1$ **b/** $f(x) = -1$ **c/** $f(x) > 0$

3. Soit les points A (-2, 4) ; B (0, 1) et C (1, 0)

g est la fonction affine représentée par $[0A) \cup [BC) \setminus \{B\}$

a/ Placer les points A, B et C

b/ Donner les expressions de *g(x)*

c/ Résoudre graphiquement l'équation : $f(x) - g(x) < 0$

Exercice n°3 :

Soit la fonction f définie sur [-1, + ∞[par $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$

1. a/ Déterminer la variation de f sur [-1, + ∞[.

b/ Tracer $\mathcal{C}_f$.

2. Soit la fonction g définie par $g(x) = (f(x))^2$

a/ Résoudre graphiquement les équations $g(x) = 1$ et $g(x) = 0$

b/ Déterminer les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$

Exercice n°4 :

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f(x) = \begin{cases} (x-2)^2 - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ (x+2)^2 - 1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

1. a/ Montrer que f est paire.

b/ Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) \geq -1$

2. a/ Étudier les variations de f sur [0, 2] puis sur [2, + ∞[.

b/ Déduire les variations de f sur]-∞, -2] et sur [-2, 0].

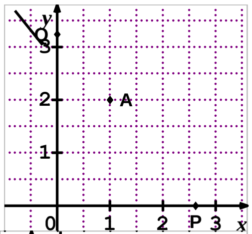
c/ Tracer $\mathcal{C}_f$

3. Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = (|x| - 2)^2 - 1$. Déduire $\mathcal{C}_g$ dans le même repère.

Exercice n°5 :

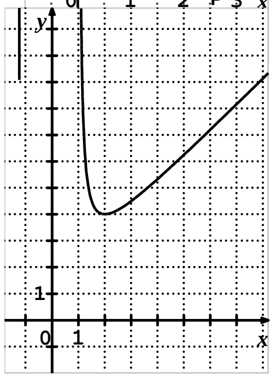
Soit les points *A (1,2) ; P (x, 0) et Q (0, y)* tels que *x > 1 ; y ∈ ℝ* et *A, P et Q* sont alignés

On désigne par $\mathcal{A}(x)$ l'aire du triangle OPQ



1. Vérifier que $\mathcal{A}(x) = \frac{x^2}{x-1}$

2. On donne la représentation graphique de la fonction $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$ pour $x > 1$.



a/ Déterminer x pour que $\mathcal{A}$ (x) soit minimale

b/ Déterminer graphiquement la valeur minimale de $\mathcal{A}$ (x).

c/ Vérifier par le calcul le résultat **2.b**.