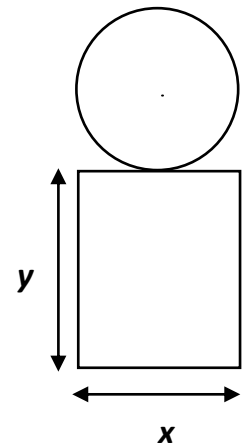


EXERCICE N : 1 (3.5 points)

On se propose de fabriquer à l'aide d'un fil métallique de longueur **1 mètre** , un objet formé d'un cercle et d'un rectangle tels que le rectangle et le cercle sont situés dans le même plan et sont tangents extérieurement (voir figure) . Le diamètre du cercle est égal à la mesure x de l'un des cotés du rectangle .



1) a) Montrer que : $y = \frac{1 - x(\pi + 2)}{2}$.

b) Prouver que : $x \in]0; \frac{1}{\pi + 2}[$.

2) On pose $S(x)$: la surface du rectangle .

a) Donner l'expression de $S(x)$ en fonction de x puis donner son sens de variations sur $]0; \frac{1}{\pi + 2}[$

b) Déterminer la valeur de x pour laquelle la surface $S(x)$ est maximale .

EXERCICE N : 2 (5.5 points)

I) Dans un examen un élève doit tirer **simultanément** et au hasard trois questions parmi 10 réparties de la manière suivante : 5 questions d'analyse ; 3 questions de géométrie et 2 questions de dénombrement . On considère les évènements suivants :

A : « L'élève tire trois questions du même chapitre »

B : « L'élève tire trois questions de trois chapitres différentes »

C : « L'élève tire trois questions de deux chapitres différentes »

D : « L'élève tire au moins une question du chapitre dénombrement »

1) Déterminer le cardinal des ensembles **A** , **B** , **C** et **D** .

2) Déterminer le cardinal des ensembles $C \cap D$ et $C \cup D$.

II) On suppose maintenant que l'élève doit tirer **l'un après l'autre** trois questions **différentes** parmi les 10 . On considère les évènements suivants :

E : « L'élève tire trois questions d'analyse »

F : « L'élève tire au plus deux questions d'analyse »

G : « La première question tirée par l'élève est une question de géométrie »

1) Déterminer le cardinal des ensembles suivants **E** , **F** et **G** .

2) On suppose que parmi les 5 questions d'analyse il y'a trois questions difficiles, parmi les 3 questions de géométrie il y'a deux questions difficiles et les deux questions de dénombrement sont faciles .

On considère l'évènement :

H : « L'élève tire une seule question difficile et une seule question d'analyse » Déterminer card (H) .

EXERCICE N : 3 (4.5 points)

Soit la suite (U_n) définie sur \mathbb{N} par : $U_n = \frac{1}{2^n}$.

1) a) Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Calculer la limite de la suite (U_n) .

2) On considère la suite (V_n) définie sur \mathbb{N} par :
$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n + \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n on a : $V_n > 1$.

b) Montrer, que pour tout entier naturel n on a : $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2} (1 - V_n)$.

c) Déduire alors le sens de variations la suite (V_n) .

3) a) Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $V_n = 1 + U_n$.

b) En déduire la limite de la suite (V_n) .

EXERCICE N : 4 (6.5 points)

A) 1) a) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 = -3$.

b) Développer $(Z - 1)^2$ puis déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation : $Z^2 - 2Z + 4 = 0$.

2) Soit l'équation (E) : $Z^3 + 8 = 0$.

a) Vérifier que : $Z^3 + 8 = (Z + 2) (Z^2 - 2Z + 4)$.

b) Résoudre alors, dans \mathbb{C} , l'équation (E).

B) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct $R (O, \vec{u}, \vec{v})$ (Unité : 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives : $Z_A = 1 + i\sqrt{3}$, $Z_B = 1 - i\sqrt{3}$ et $Z_C = -2$.

1) a) Ecrire sous forme trigonométrique Z_A , Z_B et Z_C .

b) Déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle (\mathcal{C}) de centre O et de rayon 2.

c) Placer les points A, B et C dans le repère R.

2) a) Calculer les distances AB, AC et BC.

b) Déduire la nature du triangle ABC.

c) Déterminer l'affixe Z_D du point D pour lequel ABDC soit un losange.

3) Soit $(\Gamma) = \left\{ M \in P \text{ d'affixes } Z \text{ telles que } \arg \left(\frac{Z^2}{1 + i\sqrt{3}} \right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \right\}$. Déterminer et construire (Γ).

Bon travail. 😊