| | | |
|---|---|---|
| Ministère de l'éducation et de la formation Direction régionale de Gabès | Cours : Oscillations électriques forcées en régime sinusoïdal<br>Année : 2012-2013 | Prof : Daghsni Said<br>Classes : 4ème Techniques |
| Lycée : Taher El Hadded | Matière : Sciences physiques | |

## I- Etude pratique

L'intensité du courant oscille sinusoidalement avec une fréquence N imposée par le générateur
L'amplitude Im de l'intensité et son déphasage par rapport à la tension excitatrice u du générateur varient avec la fréquence .
Pour **$N=N_0$** l'amplitude de l'intensité atteint une valeur maximale , c'est la résonance d'intensité

## II- Etude théorique .

### II-1-Equation différentielle :

Appliquons la loi des mailles au circuit : **$u(t)=u_R(t)+u_B(t)+u_C(t)$**
La tension aux bornes d'un conducteur ohmique de résistance **R** est: **$u_R(t)=Ri(t)$**
La tension aux bornes d'une bobine de résistance interne **r** et d'inductance **L** est :
**$u_B(t)= L(di(t)/dt) + ri(t)$**
La tension aux bornes d'un condensateur de charge **q** et de capacité **C** est :
**$u_C(t)=q/C =(\int idt)/C$**
La loi des mailles s'écrit donc : **$u(t) =(R+r)i+L(di/dt)+(\int idt)/C$**
C'est une équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant **i(t)** .

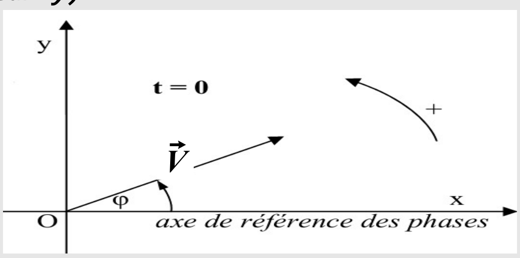
### II-2- Solution en i(t) de l'équation différentielle :

L'équation différentielle précédente admet comme solution particulière celle du régime permanent : **$i(t)=I_m \sin(\omega t+\varphi_i)$**

### II-3- Construction de Fresnel de l'équation différentielle:

#### II-3-1- Le vecteur de fresnel

On associe à toute grandeur sinusoïdale **$y(t)=Y_m \sin(\omega t+\varphi_i)$** , un vecteur appelé : **vecteur de fresnel** $\vec{V}$
- de valeur $\|\vec{V}\|=Y_m$ (c'est l'amplitude la grandeur **y** )
- tournant avec une vitesse angulaire constante $\omega$ autour d'un point $O$
( c'est la pulsation de la grandeur y )
- et fait avec l'axe **Ox** d'un repère plan **(Ox,Oy)** un angle $(\vec{V};\vec{OX})=\omega\cdot t+\varphi_y$
(c'est la phase de la grandeur **y)**

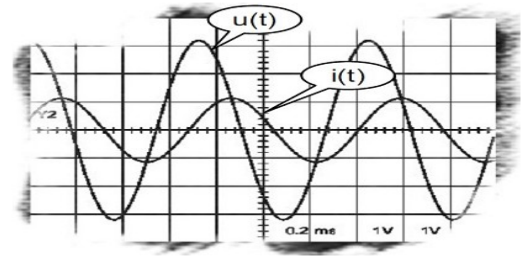
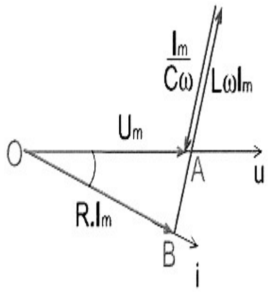
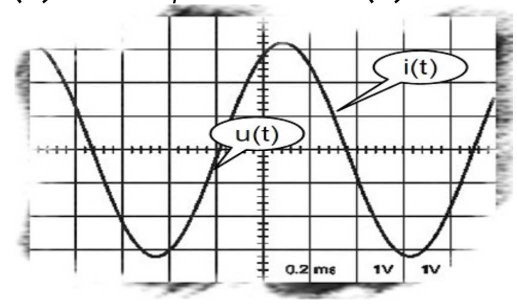
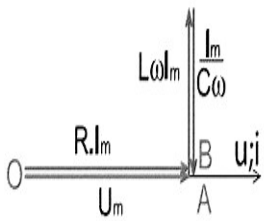
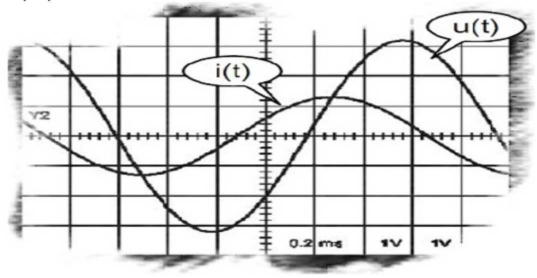
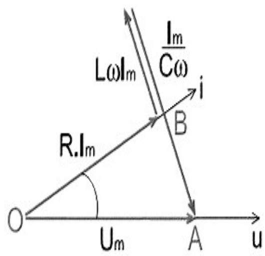



Ce vecteur est représenté dans la position qu'il occupe à la date **t=0 s**, l'axe de référence des phases étant l'axe **Ox**.

#### II-3-2- Construction de fresnel :

Les tensions aux bornes des différents dipôles sont :
**$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$** .
**$u_R(t)=Ri=RI_m\sin(\omega t+\varphi_i)$**.
et **$u_B(t)=L(di/dt)+ri =L\omega I_m \cos(\omega t+\varphi_i)=L\omega I_m \sin(\omega t+\varphi_i+(\Pi/2))$**
et
**$u_C(t) =q(t)/C = (\int idt)/C =(1/C\omega)I_m\cos(\omega t+\varphi_i)=(1/C\omega) I_m\sin(\omega t+\varphi_i-(\Pi/2))$**.
A chaque tension de l'équation différentielle on associe un vecteur tournant: le vecteur de Fresnel.
À **$u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$** correspond le vecteur de Fresnel : **$V[\ U_m,\varphi_u]$** .
À **$R_tI_m\sin(\omega t+\varphi_i)$** correspond le vecteur de Fresnel : **$V_1[\ R_tI_m,\varphi_i]$** .
À **$L\omega I_m\sin(\omega t+\varphi_i+(\Pi/2))$** correspond le vecteur de Fresnel : **$V_2[\ L\omega I_m,\varphi_i+(\Pi/2)]$**.
À **$(1/C\omega)I_m\sin(\omega t+\varphi_i-(\Pi/2))$** correspond le vecteur de Fresnel : **$V_3[(1/C\omega)I_m,\varphi_i-(\Pi/2)]$** .
D'après l'équation différentielle on peut écrire : **$V_1+V_2+V_3=V$**

*Trois constructions sont possibles :*

| | **Nature de circuit** | **Déphasage** | **Courbes de i(t) et de u(t)** | **Construction de fresnel** |
|---|---|---|---|---|
| $\omega>\omega_0$ c'est à dire $\omega^2>\omega_0^2$ ce qui donne $\omega^2> 1/LC$ d'où $L\omega > 1/C\omega$ et parsuite $L\omega I_m > I_m/C\omega$ donc $\|\|V_2\|\|>\|\|V_3\|\|$ | le circuit est dit **inductif** | $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i >0$ <br> $\varphi_u=0$ <br> donc <br> $\Delta\varphi=-\varphi_i$ <br> $\Delta\varphi>0$ <br> donc $\varphi=\varphi_i<0$ | **i(t)** est en retard de phase sur **u(t)**  |  |
| $\omega=\omega_0$ c'est à dire $\omega^2=\omega_0^2$ ce qui donne $\omega^2= 1/LC$ d'où $L\omega = 1/C\omega$ et parsuite $L\omega I_m = I_m/C\omega$ donc $\|\|V_2\|\|=\|\|V_3\|\|$ | le circuit est dit **résistif** | $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i =0$ <br> $\varphi_u=0$ <br> donc <br> $\Delta\varphi=-\varphi_i$ <br> $\Delta\varphi>0$ <br> donc $\varphi=\varphi_i=0$ | **i(t)** est en phase avec **u(t)**  |  |
| $\omega<\omega_0$ c'est à dire $\omega^2<\omega_0^2$ ce qui donne $\omega^2< 1/LC$ d'où $L\omega < 1/C\omega$ et parsuite $L\omega I_m < I_m/C\omega$ donc $\|\|V_2\|\|<\|\|V_3\|\|$ | le circuit est dit **capacitif** | $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i <0$ <br> $\varphi_u=0$ <br> donc <br> $\Delta\varphi=-\varphi_i$ <br> $\Delta\varphi<0$ <br> donc $\varphi=\varphi_i>0$ | **i(t)** est en avance de phase sur **u(t)**  |  |

**II-4- Expression de l'intensité maximale Im .**

D'après l'une des constructions de Fresnel correspondantes *à l'équation différentielle et d'après le théorème du Pythagore, on peut écrire*

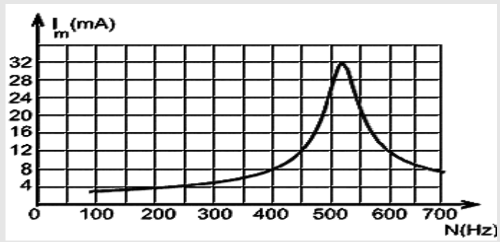
$U_m^2=(R_tI_m)^2+(L\omega I_m-(I_m/C\,\omega))^2$

ce qui donne $U_m^2 = [R_t^2+(L\omega I_m-(I_m/C\,\omega))^2]\,I_m^2$

D'où

$I_m = U_m /[R_t^2+(L\omega-(1/C\,\omega))^2]^{1/2}$

l'allure de la courbe $I_m = f(\omega)$ est ci-contre:




**II-5- Expression de déphasage $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i$ .**

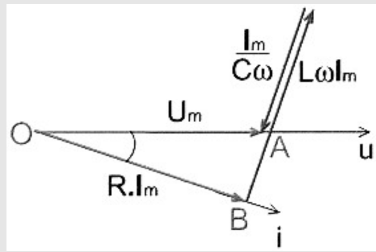
Pour déterminer le déphasage $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i$

Considérons la construction de fresnel suivante :

$tg(\Delta\varphi)=BA/OB= (L\omega I_m-(I_m/C\,\omega))/ R_tI_m$ ce qui donne $tg(\Delta\varphi)=(L\omega-(1/C\,\omega))/ R_t$

Si $\omega$ tend vers $+\infty$ $tg(\Delta\varphi)$ tend vers $+\infty$ de même si $\omega$ tend vers $-\infty$ $tg(\Delta\varphi)$ tend vers $-\infty$ donc $-\pi/2 < \Delta\varphi < \pi/2$ et puisque $\Delta\varphi=-\varphi_i$

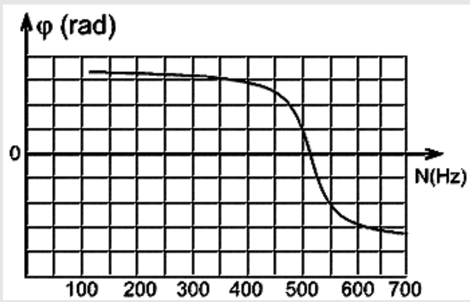
Représentons alors l'allure de la courbe $\varphi_i=f(\omega)$



**Remarque :**

$\cos(\Delta\varphi) = OB/OA = R_tI_m/U_m = R_t/Z$

s'appelle facteur du puissance de ciruit **RLC**



### II-6- Impédances du circuit .

Le rapport $U_m/I_m$ représente l'impédence $Z$ du circuit : $Z= U_m/I_m = U/I =[R_t^2+(L\omega-(1/C\ \omega))^2]^{1/2}$
Le rapport $U_{cm}/I_m$ représente l'impédence $Z_C$ du condensateur : $Z_C= U_{Cm}/I_m = U_C/I = 1/C\ \omega$
Le rapport $U_{Bm}/I_m$ représente l'impédence $Z_B$ de la bobine : $Z_B= U_{Bm}/I_m = U_B/I = [r^2+(L\omega)^2]^{1/2}$
Le rapport $U_{Rm}/I_m$ représente l'impédence $Z_R$ du conducteur ohmique : $Z_R= U_{Rm}/I_m = U_R/I = R$ .

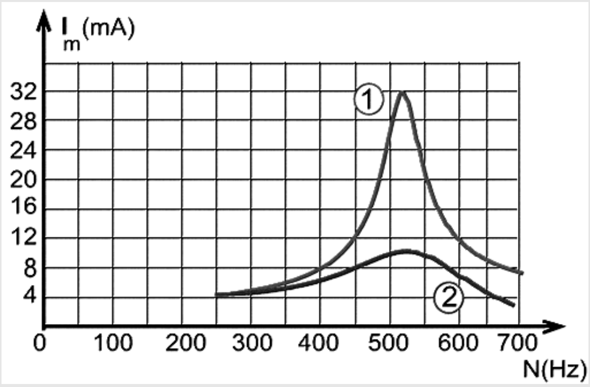
### II-7- La résonance d'intensité .

#### II-7-1- Condition d'obtention :

A la résonance d'intensité , l'amplitude $I_m$ est maximale
Dans ce cas l'impédance $Z$ est minimale , il suffit donc de prendre $L\omega-(1/C\ \omega)=0$ ce qui signifie $L\omega=1/C\ \omega$ parsuite $\omega^2=1/LC = \omega_0^2$ d'où à la résonance $\omega = \omega_0$ .
**Conclusion:** La résonance d'intensité est obtenue pour une pulsation $\omega$ égale à la pulsation propre $\omega_0$ du circuit **RLC** .

#### II-7-2- Courbes de résonance (effet de la résistance totale du circuit ) :

la valeur de la fréquence de résonance ne dépend pas de la résistance total du circuit $R_t$ .
le déphasage entre l'intensité **i** et la tension d'alimentation **u** à la résonance ne dépend pas de $R_t$ ,il est nul $\varphi=0$.
Pour des faibles résistances (Amortissement faible)
la résonance est dite **aiguë** , elle est dite **floue** pour les grandes résistances (Amortissement importante).
Le maximum de l'amplitude $I_m$ de l'intensité dépend de $R_t$ mais la fréquence de résonance $N_r$ reste toujours égale à la fréquence propre du circuit $N_0$.




#### II-7-3- Grandeurs caractéristiques de la résonance d'intensité :

**a) La fréquence à la résonance :**

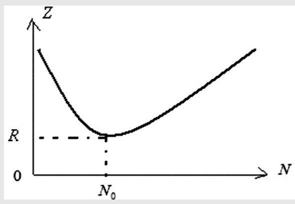
A la résonance on a $N=N_0=1/(2\pi(LC)^{1/2})$ et $\omega = \omega_0 = 1/(LC)^{1/2}$

**b) Déphasage à la résonance :**

A la résonance on a $L\omega-(1/C\ \omega)=0$ or $tg(\Delta\varphi)=(L\omega-(1/C\ \omega))/\ R_t$ d'où $tg(\Delta\varphi)=0$ ce qui donne $\Delta\varphi=\varphi_u-\varphi_i=0$ donc la tension excitatrice **u(t)** et l'intensité du courant **i(t)** dans le circuit sont en concordance de phase .

**c) Impédance du circuit à la résonance :**

A la résonance on a
$L\omega-(1/C\ \omega)=0$ or $Z=[R_t^2+(L\omega-(1/C\ \omega))^2]^{1/2}$ ce qui donne $Z=R_t=R+r$
A la résonance l'impédance du circuit est minimale .




**d) Intensité du courant à la résonance :**

A la résonance l'intensité maximale du courant prend une valeur maximale $I_{mmax}=U_m/R_t$

### II-8- Le facteur de qualité (coefficient de surtension).

Le quotient $Q = U_{Cm}/U_m = U_{bm}/U_m$ est appelé facteur de surtension à la résonance.
A la résonance d'intensité ,il peut apparaître aux bornes de la bobine ainsi qu'aux bornes du condensateur des tensions plus grandes que la tension excitatrice **u** , on dit qu'il y a un phénomène de surtension
A la résonance on a : $\omega=\omega_0$ ,$U_{cm}=I_{m0}/C\omega_0$ et $U_m=(R_0+r)I_{m0}$ donc **Q** peut s'écrire: $Q=1/((R_0+r)C\omega_0)$
A la résonance $1/C\ \omega_0 =L\omega_0$ il en résulte que **Q** peut s'écrire aussi: $Q=L\ \omega_0/(R_0+r)$
or $\omega_0 =1/\sqrt{LC}$ donc **Q** peut s'écrire uniquement en fonction des caractéristiques **R, L** et **C** de l'oscillateur : $Q=(1/(R_0+r))\ \sqrt{(L/C)}$
A la résonance $U_m=(R_0+r)I_m$ et $U_{bm}=\sqrt{(r^2+(L\omega_0)^2)}$ ;

si $L\omega_0 >> (R_0+r)$ alors $U_{bm} > U_m$ il apparaît une surtension aux bornes de la bobine de même pour le condensateur puisque $1/C\omega_0 = L\omega_0$ dans ce cas $Q>1$.
Si $Q<1$ il n'y a plus de surtension à la résonance

### II-9- La puissance électrique moyenne.

#### II-9-1 Expression de la puissance électrique instantanée :

La puissance instantanée $p(t)$ reçue à chaque instant par le circuit **RLC** excité par la tension $u(t)$ et parcouru par le courant électrique d'intensité $i(t)$ est donnée par la relation

$$p(t) = u(t)i(t).$$

or

$i(t)=I_m\sin(\omega t+\varphi_i)$ et $u(t)=U_m\sin(\omega t+\varphi_u)$ donc $p(t) = U_mI_m \sin(\omega t+\varphi_u)\sin(\omega t+\varphi_i)$

ce qui donne $$p(t) = (1/2)\, U_mI_m[\cos(\varphi_u-\varphi_i) - \cos(2\omega t+(\varphi_u-\varphi_i))]$$

#### II-9-2 Expression de la puissance électrique moyenne :

En régime sinusoïdal forcé , la puissance moyenne $P$ est la valeur prise par $p(t)$ pendant une période , elle est dite **active** ou **réelle** , elle s'exprime en **watt** et se mesure à l'aide d'un **wattmètre** $$P=1/T_p\int_0^{T_p} p(t)dt = 1/T_p\int_0^{T_p}(1/2)\, U_mI_m[\cos\Delta\varphi - \cos(2\omega t+\Delta\varphi)]dt$$

$$P = U_mI_m/2T_p \int_0^{T_p} \cos\Delta\varphi\, dt - U_mI_m/2T_p\int_0^{T_p} \cos(2\omega t+\Delta\varphi)dt$$

$$P= U_mI_m/2T_p\, [\, \cos\Delta\varphi\, [t]_0^{T_p} - (1/2\omega)[\sin(2\omega t+\Delta\varphi)]_0^{T_p}]$$

La fonction $\sin(2\omega t+\Delta\varphi)$ est périodique de période $T_p=\Pi/\omega$ donc le second terme s'annule et puisque $[t]_0^{T_p}=T_p$ et l'expression finale de la puissance moyenne est : $P=1/2\, U_mI_m\cos \Delta\varphi$
quelque soit la fréquence de l'excitateur on a $\cos\Delta\varphi=R_t/Z$ et $U_m=ZI_m$ donc la puissance électrique moyenne consommée par le circuit est:
$P=1/2\, R_t I^2_m= R_t I^2$ ($I$ la valeur efficace de $i(t)$) c'est une puissance dissipée par effet joule dans les résistances du circuit .
le condensateur et l'inductance emmagasinent l'énergie sans la consommer .

#### II-9-3 Evolution de la puissance électrique moyenne d'un circuit RLC série en fonction de la fréquence.

La puissance moyenne électrique fournit par le **G.B.F** est :$P=R_t.I^2=R_t.U^2/Z^2=R_t.U^2/[R_t^2+(L\omega-(1/C\omega))^2]$
Pour les faibles pulsations $\omega<<\omega_0$ et les grandes pulsations $\omega>>\omega_0$
le transfert de puissance est quasiment nul , il est maximal au voisinage de $\omega_0$.
La dissipation d'énergie (donc de puissance) se fait à n'importe quelle fréquence mais elle est d'autant plus importante que la résistance est plus grande.

#### II-9-4 Le facteur de puissance.

La tension $u(t)$ aux bornes de l'installation est sinusoïdale de fréquence **50Hz** et de valeur efficace $U_{eff}= 220V$. L'intensité efficace du courant est $I_{eff} = 15A$ (au maximum).
L'impédance de l'installation induit un déphasage $(\varphi_u-\varphi_i)$ entre $u(t)$ et $i(t)$.
Son facteur de puissance s'écrit donc $\cos(\varphi_u-\varphi_i)$ Nous le noterons plus simplement $\cos\varphi$ .
- L'usager dispose donc d'une puissance moyenne $p_{moy} = U_{eff}\, I_{eff} \cos(\varphi_u-\varphi_i)$ , le facteur de puissance étant caractéristique de l'installation et la tension efficace délivrée par **S.T.E.G** étant fixée à **220V**.

Si cet usager souhaite disposer d'une puissance moyenne plus grande, il peut :
- appeler plus de courant mais cela diminue la capacité des installations de **S.T.E.G** et augmente l'effet Joule dans les lignes et dans les éléments résistifs de l'installation.
- modifier son installation de manière à augmenter lefacteur de puissance.

- Le fournisseur d'électricité souhaite minimiser les pertes d'énergie lors du transport de l'électricité de la centrale jusqu'à l'installation de l'usager.

La puissance moyenne perdue dans une ligne de résistance $r$ s'écrit : $p_{moy} = r_{ligne}\, I_{eff}^2$ .
On peut donc minimiser ces pertes de différentes façons :
- Diminuer la résistance de la ligne en augmentant le diamètre des câbles. Cette solution présente cependant l'inconvénient d'alourdir les câbles et d'augmenter leur coût.
- Diminuer l'intensité efficace du courant délivré.

L'intensité efficace dans la ligne étant la même que dans l'installation, on peut écrire :
$I_{eff} = p_{moy} /U_{eff} \cos(\varphi_u-\varphi_i)$.
On peut donc, pour une même puissance délivrée à l'usager, diminuer $I_{eff}$ en augmentant le facteur de puissance de l'installation. **S.T.E.G** impose dans ce but un facteur de puissance minimum de **0,928**.
L'intensité efficace circulant dans les lignes est également abaissée grâce à l'utilisation de lignes haute tension de tension efficace de plusieurs centaines de **kV**.
Cette tension efficace est ensuite abaissée dans des transformateurs en amont de l'installation.