A.S : 2012/ 2013	Série dérivabilité	Prof : HAJJI

Exercice N° 1 :

Soit la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par f(x) = $\begin{cases} \frac{tgx-x}{x} si\ x \neq 0 \\ 0\ si\ x = 0 \end{cases}$

1°) a) Montrer que la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par g(x) = tgx – x et continue sur$[0,\frac{\pi}{2}[$

et dérivable sur$]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) En déduire que pour tout x ∈ $]0,\frac{\pi}{2}[$, il existe un réel c ∈ $]0, x[$ tel que f(x) = tg^2c .

c) Prouver que $0 \leq f(x) \leq tg^2x$

2°) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et déterminer $f'_d(0)$

Exercice N° 2 :

Soit la fonction f définie sur IR par f(x)= $\frac{3x}{\sqrt{1+x^2}}$ + 2 et (C) sa courbe représentative

dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1°)a) Justifier que f est dérivable sur IR et calculer f ‘ (x).

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente T au point A(0,2).

d) Construire (C) et T.

2°) a) Montrer que $\forall x \in [\sqrt{2},+\infty[, 0 < f'(x) \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) Montrer que l’équation f(x) = x admet dans $[\sqrt{2},+\infty[$ une solution unique α.

3°) Soit la suite (U_n) définie sur IN par U_0= 2 et U_{n+1}= f (U_n).

a) Montrer que $\forall n \in IN, U_n \geq 2$.

b) Montrer que $\forall n \in IN\ |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}\ |U_n - \alpha|$ et que $|U_n - \alpha| \leq (\frac{1}{\sqrt{3}})^n\ |2 - \alpha|$.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et donner sa limite.

www.devoir@t.net © 2012

Exercice N° 3 :

1°) Soit la fonction g définie par g(x)=x^2-3x

Représenter la courbe γde g dans repère orthonormé du plan.

2°) Soit f la fonction définie par f(x)=x^2-3x- $\frac{1}{x}$

a) Calculer pour tout x∈ IR^*,f'(x)et f''(x) et montrer que la courbe(C) de f admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

b) Etudier le signe de f(x)-g(x) puis en déduire la position de(C) par rapport à γ.

c) Etudier les variations de f.

d) Calculer $\lim\limits_{|x|\to+\infty}$ (f(x)-g(x)).En déduire une construction des branches infinies de (C) en construisant (C).

Exercice N° 4 :

1°) Soit la fonction définie sur IR par f(x) = - x + $\sqrt{x^2+8}$.

a) Montrer que f est décroissante sur IR.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier les branches infinies de f.

d) Tracer la courbe C de f dans un repère orthonormé (o,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$).

e) Montrer que $\forall x \in [1,2]$, 1≤ $f(x) \leq 2$

f) Démontrer que si x ∈ [1,2], |f ' (x)≤ $\frac{2}{3}$|.

2°) On note U la suite réelle tel que, pour tout n de IN : U_0 = 1 et $U_{n+1} = -U_n + \sqrt{8+U_n^2}$.

a) Montrer que pour tout entier n, 1≤ $U_n \leq 2$.

b) Dans le même repère que la courbe C, tracer la droite d'équation y=x puis placer les valeurs $U_0, U_1, U_2 et\ U_3$.

En utilisant les valeurs trouvées sur le graphique, répondre sans faire ce calculs aux questions suivantes :

U est-elle croissante ? U est-elle décroissante ?

U semble-t-elle admettre une limite ?

www.devoir@t.net © 2012

c) On pose $\ell = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$. Vérifier que $f(\ell) = \ell$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n : $|U_{n+1} - \ell| \leq \frac{2}{3}|U_n - 3|$

e) Montrer que la suite U converge vers ℓ

www.devoir@t.net © 2012