

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

EXERCICE 1 :

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives $-2 + 3i$, $-3 - i$ et $2,08 + 1,98i$. Le triangle ABC est :

(a) : isocèle et non rectangle (b) : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle (d) : ni rectangle ni isocèle
- À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{z - 4i}{z + 2}.$$
 L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :

(a) : un cercle de rayon 1 (b) : une droite
(c) : une droite privée d'un point (d) : un cercle privé d'un point
- Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :

(a) : un cercle (b) : une droite
(c) : une droite privée d'un point (d) : un cercle privé d'un point
- Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \tan(x)$.

(a) : $(f^{-1})'(1) = 1$ (b) : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{2}$
(c) : $(f^{-1})'(1) = \frac{1}{4}$ (d) : $(f^{-1})'(1) = -\frac{1}{2}$

EXERCICE 2 :

On considère les trois nombres complexes :

$$z_1 = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right); \quad z_2 = 4; \quad z_3 = 2 \left(1 + e^{4i\frac{\pi}{3}} \right)$$

On appelle M_1, M_2, M_3 leurs images respectives dans le plan complexe (P) rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de z_1 et de z_3 .
- Placer les points M_1, M_2, M_3 dans le plan (P) (utiliser la feuille annexe).
- a) Calculer sous forme trigonométrique les nombres complexes :

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

$$z_1 - 2 ; z_2 - 2 ; z_3 - 2$$

b) En déduire que les trois points M_1, M_2, M_3 sont situés sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est un triangle rectangle.

EXERCICE 3 :

Soit g la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par : $g(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$

1. Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet une solution unique α et que $\alpha \in]2,3[$.

2. Montrer que pour tout $x \in [2,3]$; $|g'(x)| \leq \frac{1}{4}$

3. Soit U la suite définie sur IN par : $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in IN ; 2 \leq U_n \leq 3$.

b) Utiliser l'inégalité des accroissements finis et montrer que pour tout $n \in IN$ on a :

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{4} |U_n - \alpha|.$$

c) En déduire que pour tout n de IN on a, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

EXERCICE 4 :

Soit f la fonction définie sur $[0,1[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$.

On a représenté dans la feuille annexe la courbe (C) de f dans le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1.a. Par une lecture graphique : prouver que f est une bijection de $[0,1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b. Tracer la courbe (C') de f^{-1} dans le même repère.

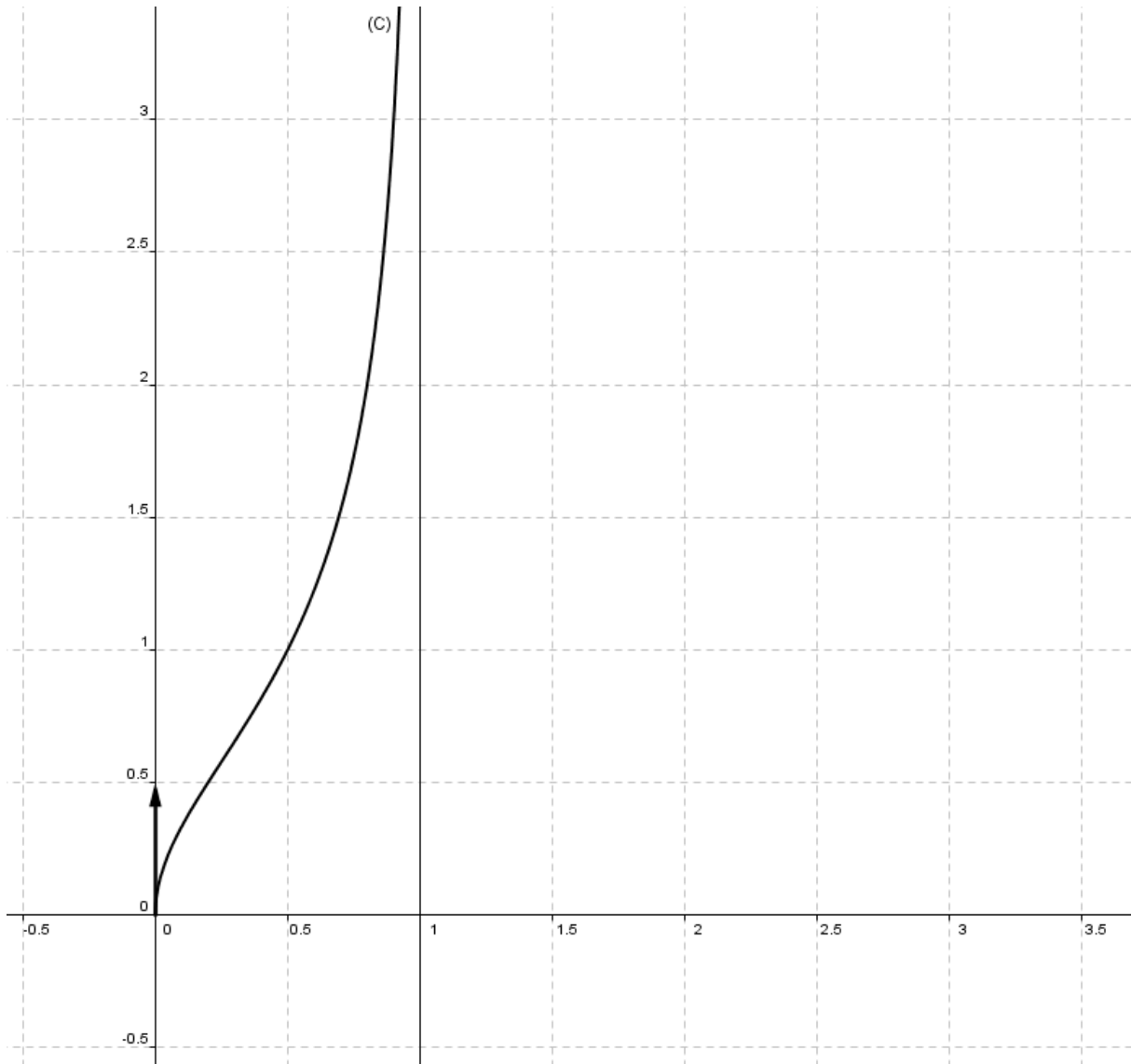
c. Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

2. Déterminer puis tracer l'équation de la tangente à la courbe (C) au point I d'abscisse 0,5.

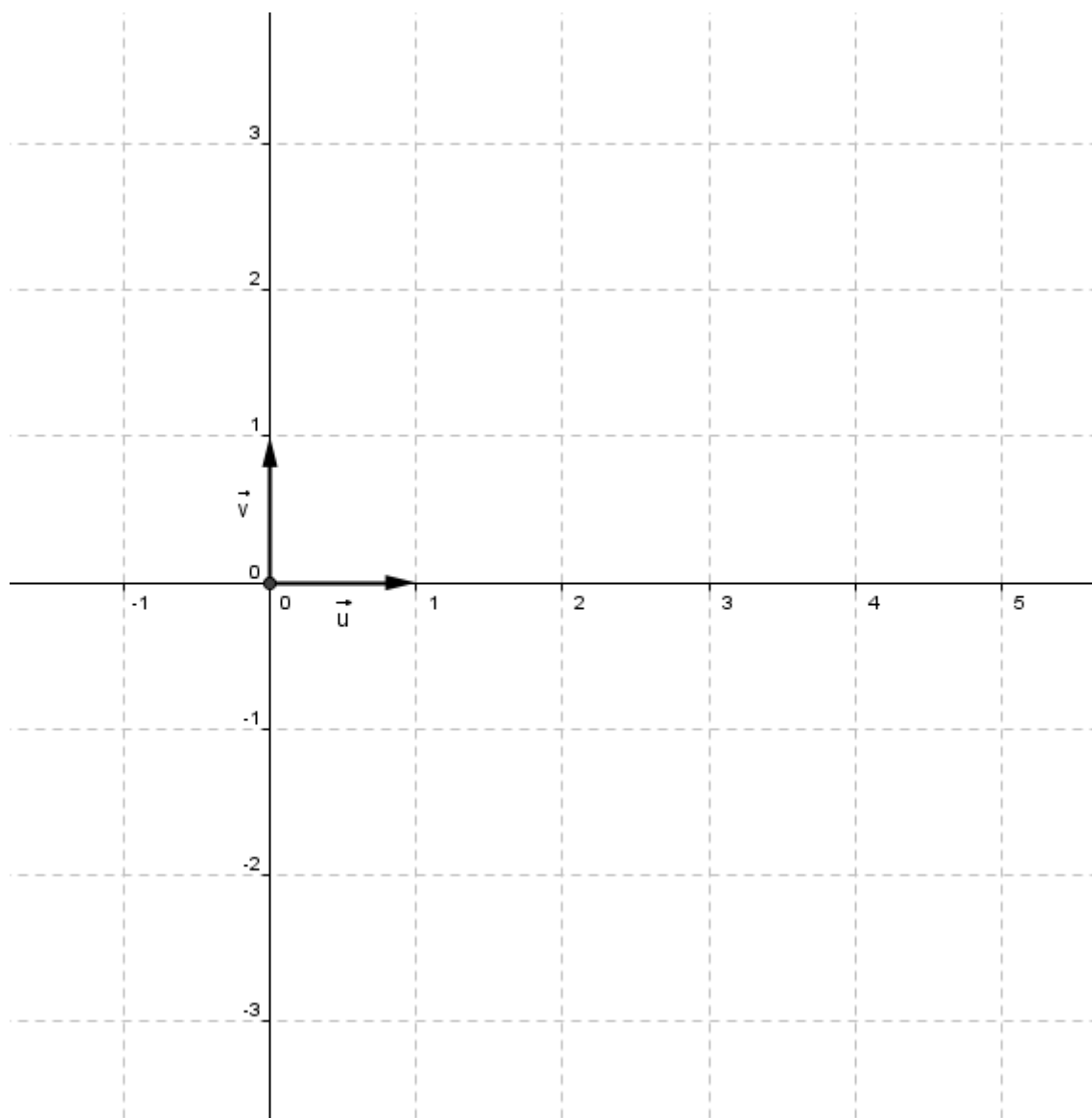
3. Soit la fonction F définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $F(x) = f(\sin x)$.

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

Montrer que F est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $F'(x)$.



DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1



DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1