L. Ibn Charaf Ennadhour	Devoir de synthèse n°1	Décembre : 2012 -
P : Horri Nizar	de mathématiques : Durée 2 h	Classe : 4sc . téch 1 et 2

Exercice n° 1 (3 pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse .

1) Le nombre $\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^6$ est un réel .

2) Les nombres complexes $(1+2i)$ et $(-1+3i)$ sont les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $(E) : z^2 + 5iz - 7 + i = 0$.

3) La limite de $\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$ en $(-\infty)$ est égale à zéro .

4) Soit f une fonction définie et dérivable sur $[o\ ;\ 1]$ telle que $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$ alors f est une bijection de $[o\ ;\ 1]$ sur $[-1\ ;\ 1]$.

Exercice n° 2 (6 pts)

1) On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 - (5+3i)z + 2 + 6i = 0$.

a) Vérifier que $(3+i)^2 = 8 + 6i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

2) Soit , dans $\mathbb{C}$, $P(z) = z^3 - (5+i)z^2 + 4(2-i)z - 12 + 4i$.

a) Montrer que $P(z) = (z+2i)(z^2 - (5+3i)z + 2 + 6i)$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation : $(E') : P(z) = 0$.

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1 + i$; $z_C = 4 + 2i$ et $z_I = 2$.

a) Placer les points A ; B ; C et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Montrer que le point I est le milieu du segment $[AC]$.

c) Soit D le symétrique de B par rapport au point I ; vérifier que $z_D = 3 - i$.

d) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange puis calculer son aire $\mathcal{A}$.

Exercice n° 3 (5 pts)

1) Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} - 1$.

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -2$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

b) On admet que la fonction g est strictement croissante sur IR ; Déduire que pour tout $x \in IR$ on a : $g(x) < 0$

....voir suite au verso

2) *Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \sqrt{x^2+4} - x - 1$. On désigne par (Γ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.*

   a) *Montrer que f est dérivable sur IR et qu'on a pour tout $x \in$ IR : $f'(x) = g(x)$.*

   b) *Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; interpréter graphiquement le résultat .*

   c) *Montrer que la droite $D : y = -2x - 1$ est une asymptote à (Γ) au voisinage de $(-\infty)$.*

   d) *Dresser le tableau de variation de f .*

3) a) *Montrer que f est une bijection de IR sur $]-1, +\infty[$.*

   b) *Montrer que l'équation $f(x) = 0$, admet une unique solution α dans IR .*

   c) *Vérifier que $\alpha \in]1, 2[$.*

Exercice n° 4 (6 pts)

Dans l'annexe ci – jointe , on a représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe (C) d'une fonction f définie , continue et dérivable sur IR .

On sait que :

- *La courbe (C) admet l'axe des abscisses comme asymptote au voisinage de $(+\infty)$.*
- *La courbe (C) admet une seule tangente horizontale au point d'abscisse zéro .*
- *La courbe (C) coupe l'axe $(O, \vec{\imath})$ au point d'abscisse -1 .*
- *La courbe (C) admet une branche parabolique de direction asymptotique celle de $(O, \vec{\jmath})$ au voisinage de $(-\infty)$.*
- *La tangente (T) à (C) au point $(\frac{5}{3} ; -1)$ passe par le point $(\frac{10}{3} : 0)$.*

En utilisant le graphique :

1) *Déterminer :* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

2) *Déterminer $f(0)$; $f'(0)$ et $f'(\frac{5}{3})$.*

3) *Montrer que la restriction g de f à l'intervalle $I = [0, +\infty[$ est une bijection de I sur un intervalle J que l'on déterminera .*

4) *Tracer dans l'annexe la courbe $(\boldsymbol{C'})$ de la fonction g^{-1} réciproque de g ainsi que la tangente (T') à $(\boldsymbol{C'})$ au point d'abscisse (-1) .*

5) *Dresser le tableau de variations de la fonction g^{-1} .*

6) *La fonction g^{-1} est – elle dérivable à droite en (-2) ? justifier la réponse .*

7) *On suppose que f est la fonction dérivée sur IR d' une fonction h .*

   a) *Déterminer le signe de $f(x)$ sur IR .*

   b) *Donner les variations de h sur IR .*

Bon travail

Nom et prénom :…………………………………………………… Classe ………………….. N° …………

Annexe (à rendre avec la copie)