Lycée : Feriana & *Thelepte*

Hamdi-M & Mhamdi -A

16-11-2012

Devoir de contrôle N°1

Mathématiques

$4^{\text{ème}}$ maths

Durée : 2heures

Le devoir comporte 3 pages Numérotées de 1/3 à3/3
La page 3/3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (3points) : (voir annexe)

Exercice 2(6points) :

Dans la figure de ***l'annexe*** *ci-jointe est représentée, dans un repère orthonormé (O ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)*
La courbe (c_f) d'une fonction f définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$.

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe (c_f)

La courbe (c_f) admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{\imath}$) au voisinage de $+\infty$

1) a) Dresser le tableau de variation de f sur $]0,+\infty[$.

b) Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = x$

c) Etudier la position de (c_f) par rapport à la droite Δ : y = x .

2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définiessur IN par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \ , n\in \mathrm{IN}^* \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = f(v_n) \ , n\in \mathrm{IN}^* \end{cases}$$

Représenter sur l'axe des abscisses : u_0, u_1, u_2, v_0, v_1 et v_2

3) a) Montrer par récurrence que $1\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$

b) En déduire que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

4) a) Montrer par récurrence que $3\leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$

b) En déduire que (v_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) Montrer que les suites (u_n)et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 3 (6points) :

Soit f la fonction définie sur] 0,2[par $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$)

1) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe (C).

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle [1,2[.

a) Montrer que g réalise une bijection de [1,2[sur un intervalle J à préciser.

b) Tracer dans le même repère la courbe (C') de g^{-1}(g^{-1} étant la bijection réciproque de g)

c) Expliciter g^{-1} (x) pour tout x∈ J.

3) Soit H une fonction dérivable sur]0,2[telle que pour tout x $\in]0;2[$ **H'(x) = f(x)** et **H(1)=0**.

On désigne par (U_n) la suite réelle définie sur $IN^*\backslash\{1\}$ par $U_n = H(1+\frac{1}{n}) - H(1+\frac{1}{n+1})$.

a) Déterminer la limite de (U_n)

b) Montrer que $\forall n \in IN^* \backslash\{1\}$ **on a** $\frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+2}{n+1}) \leq U_n \leq \frac{1}{n(n+1)} f(\frac{n+1}{n})$

c) En déduire la limite de ($n^2 U_n$).

<u>Exercice</u> 4(5points) :

Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct (O ,$\vec{u}$,$\vec{v}$)

I) Soit l'équation (E) : $z^2 - 2mz + 2 = 0$ avec m est un paramètre complexe non nul.
On pose M(m) , M'(z') et M'' (z'') ou z' et z'' sont les solutions de l'équation (E).
Sans calculer z' et z'' montrer que :
1) M est le milieu du segment$[M'M'']$.
2) arg(z') + arg(z'') ≡ $0[2\pi]$ et que [OI) est la bissectrice de ($\overrightarrow{OM'}$, $\overrightarrow{OM''}$) ;(avec **I (1)**)

II) Soit $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$
1) Résoudre dans ℂ l'équation $z^2 - 2z + 1 + e^{i2\theta} = 0$.
2) On désigne $M_1(1 - ie^{i\theta})$, $M_2(1 + ie^{i\theta})$ et I (1)
a) Montrer que $S_I(M_1) = M_2$ (S_I la symétrie centrale de centre I).
b) Montrer que M_1 , M_2 et O sont situés sur le cercle ζ de rayon 1 et de centre que l'on déterminera
c) En déduire que le triangle OM_1M_2 est rectangle en O .
d) Déterminer la valeur de θ pour que le triangle OM_1M_2 soit isocèle.

BON TRAVAIL

Annexe à rendre avec la copie

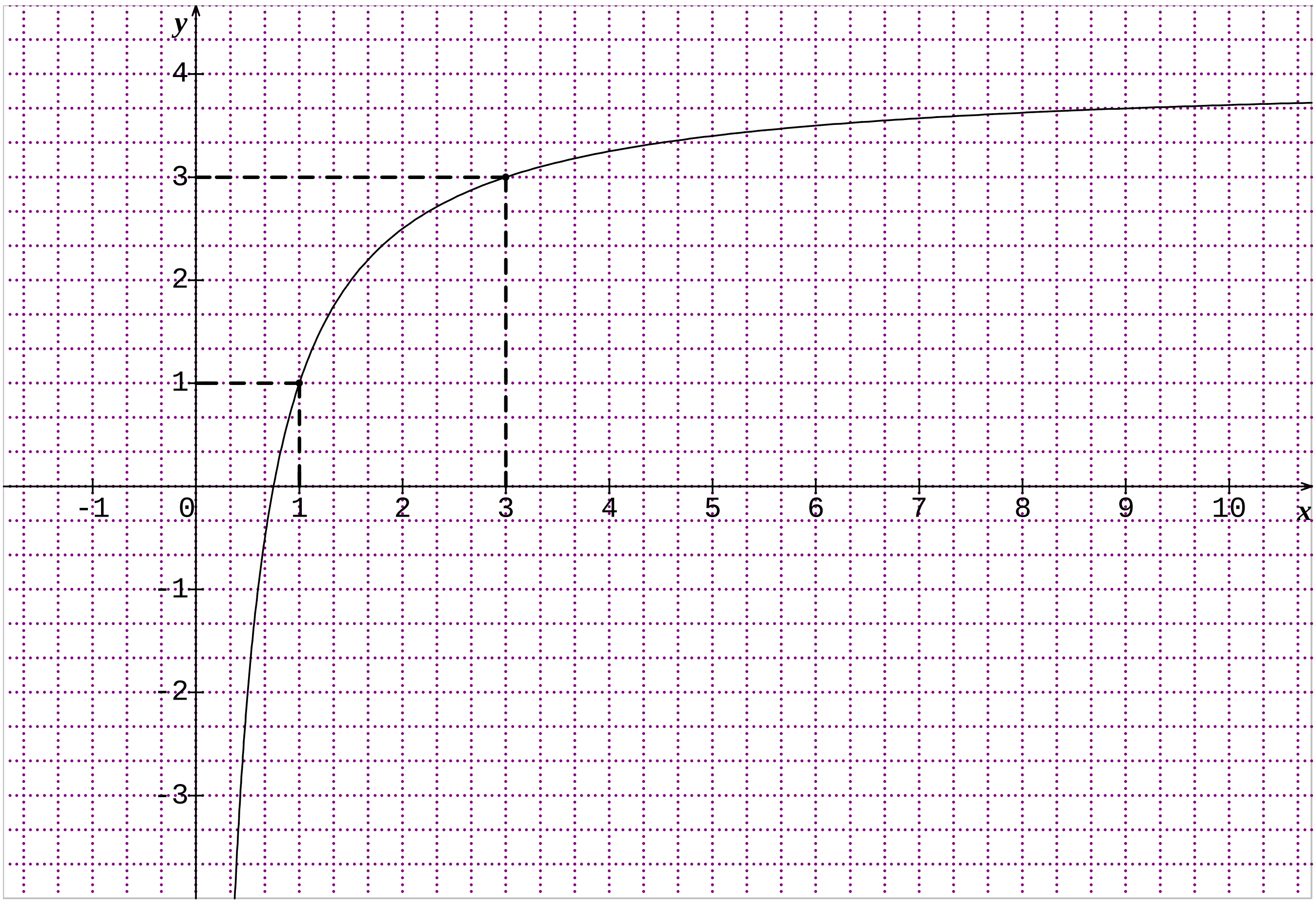
Exercice 1

Répondre par **vrai** ou **faux** sans aucunes justifications

ABCD est un rectangle ,I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$.

1) $S_{(AB)} o S_{(DC)} = t_{\overrightarrow{IJ}}$
2) $S_{(AB)} o S_{(AD)} = S_D$
3) ***Si f est une isométrie qui envoie A sur D et B sur C alor $f(J) = I$***
4) ***Si g est une isométrie tels que g (C) =D et g(D) = C et g(I) = I alors :***
   - **i)** $g(J) = J$
   - **ii)** $g = S_J$
   - **iii)** $g \circ g = Idp$

Exercice 2



Exercice 1 :

1).Faux. 2). Faux. 3). Faux. 4).i).Vrai ii). Faux. iii).Vrai.

Exercice 2 :

1).a).

X	0		$+\infty$
f '(x)		+	
f	$-\infty$	↗	$+\infty$

.b).f(x)=x signifie x=1 ou x=3.

c).

X	0		1		3		$+\infty$
f(x)-x		-	0	+	0	-	
position		(c_f)est en dessous de Δ		(c_f)est en dessus de Δ		(c_f)est en dessous de Δ	

2). Voir annexe

3).a). Pour n=0 on a $1\leq u_0 \leq u_1 \leq 3$ (vrai)

.Supposons que $1\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ et montrons que $1\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$

On a $1\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ et f est croissante sur [1 ;3] donc $f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(3)$

Donc $1\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 3$.**D'où** $1\leq u_n \leq u_{n+1} \leq 3$ **$\forall$ n∈IN**

b). On a $u_n \leq u_{n+1}$,∀ n∈IN, donc (u_n) est croissante or (u_n) est majorée par 3 donc (u_n) est convergente vers un réel α ∈[1 ;3] qui vérifie f(α)=α (car on a : $u_{n+1}= f(u_n)$ et (u_n) est convergente vers un réel α ∈[1 ;3] et f est continue en α(car f est continue sur [1 ;3]))

on a f(α)=α signifie α =1 ou α =3 or α≥ u_0 donc α≥ 2 alors α≠1 d'où α=3.

4).a). Pour n=0 on a $3\leq v_1 \leq v_0 \leq 5$ (vrai)

.Supposons que $3\leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$ et montrons que $3\leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$

On a $3\leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$ et f est croissante sur [3 ;5] donc $f(3) \leq f(v_{n+1}) \leq f(v_n) \leq f(5)$

Donc $3\leq v_{n+2} \leq v_{n+1} \leq 5$.**D'où** $3 \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 5$ ∀ n∈IN

b). On a $v_n \geq v_{n+1}$, ∀ n∈IN, donc (v_n) est décroissante or (v_n) est minorée par 3 donc (v_n) est . . convergente vers un réel α' ∈[3 ;5] qui vérifie f(α')=α' (car on a : $v_{n+1}=f(v_n)$ et (v_n) est convergente vers un réel α' ∈[3 ;5] et f est continue en α'(car f est continue sur [3 ;5]))

on a f(α')=α'signifie α' =1 ou α' =3 or 1∉ $[3\,;5]$ alors α≠1 d'où α' =3=α.

5).$\boldsymbol{on\ a}$ $u_n \leq v_n$, ∀ n∈IN, (car u_n ≤3 et v_n ≥3) et (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante et $(u_n - v_n)$ converge vers 3-3=0.

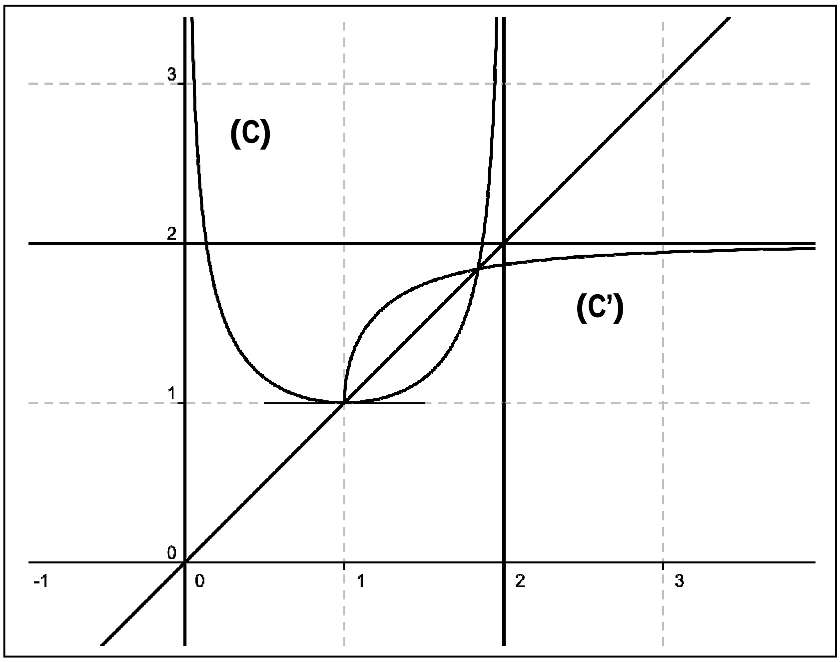
Exercice 3:

1).a).La fonction x⟼2x-x² est dérivable sur]0 ;2[et 2x-x²> 0 , ∀x ∈]0 ;2[, donc la fonction x⟼ $\sqrt{2x-x^2}$ est dérivable sur]0 ;2[,or $\sqrt{2x-x^2}$ ≠0 , ∀x ∈]0 ;2[,alors f est dérivable sur]0 ;2[et on a :

f '(x)=$\frac{-(\sqrt{2x-x^2})'}{(\sqrt{2x-x^2})^2}$ = $\frac{x-1}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$ d'où

X	0		1		2
f '(x)		-	0	+	
f	+∞	↘	1	↗	+∞

b).



2).a).g est continue et strictement croissante sur]0 ;2[donc g réalise une bijection de]0 ;2[

sur g( ]0 ;2[))=[1 ;+∞[=J.

b).Voir figure.

c).$\begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in [1\,;+\infty[\end{cases}$ signifie$\begin{cases} g(y) = x \\ y \in]0\,;2[\end{cases}$ on a $g(y) = x$ signifie x²y²-2x²y+1= 0

Δ=x^4-x²=x²(x²-1)≥0 donc y=$\frac{x^2-\sqrt{x^2(x^2-1)}}{x^2}$=1-$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ∉ $[1\,;+\infty[$ ou y=$\frac{x^2+\sqrt{x^2(x^2-1)}}{x^2}$=1+$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ ∈ $[1\,;+\infty[$

$g^{-1}(x)=1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ $\forall\, x \in [1\,;+\infty[$.

3).a).$\lim_{n\to+\infty} u_n=\lim_{n\to+\infty} H(1+\frac{1}{n})-H(1+\frac{1}{n+1})$ =0-0=0(car $\lim_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})$ =1et$\lim_{x\to1}$H(x)=H(1)=0

De même $\lim_{n\to+\infty} H(1+\frac{1}{n+1})$ =0)

b). H'(x)=f(x) , $\forall x \in]0\,;2[$,et f est strictement croissante sur [1 ;2[or $1\leq 1+\frac{1}{n+1}\leq 1+\frac{1}{n}<2$

donc $H'(1+\frac{1}{n+1})\leq H'(x)\leq H'(1+\frac{1}{n})$, $\forall\, x\in[1+\frac{1}{n+1};1+\frac{1}{n}]$,

Or H est continue sur $[1+\frac{1}{n+1};1+\frac{1}{n}]$,et H est dérivable sur $]1+\frac{1}{n+1};1+\frac{1}{n}[$ donc d'après le théoréme des accroissements finis on a :

$((1+\frac{1}{n})-(1+\frac{1}{n+1}))(H'(1+\frac{1}{n+1})\leq H(1+\frac{1}{n})-H(1+\frac{1}{n+1})\leq((1+\frac{1}{n})-(1+\frac{1}{n+1}))(H'(1+\frac{1}{n+1})$

D'où$\forall\, n\in IN^*\setminus\{1\}$ on a $\frac{1}{n(n+1)}f(\frac{n+2}{n+1})\leq U_n\leq\frac{1}{n(n+1)}f(\frac{n+1}{n})$

c).On a$\forall\, n\in IN^*\setminus\{1\}$, $\frac{n^2}{n(n+1)}f(\frac{n+2}{n+1})\leq n^2U_n\leq\frac{n^2}{n(n+1)}f(\frac{n+1}{n})$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}f(\frac{n+2}{n+1})=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n(n+1)}f(\frac{n+2}{n+1})$=1 donc $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n=1$.

Exercice 4:

I).**1)** On a z'+z ''=$\frac{-b}{a}=\frac{2m}{1}$=2m signifie $\frac{z_{M'}+z_{M''}}{2}$=m=$z_M$signifie M est le milieu du segment[$M'M''$].

2).On a arg(z')+arg(z'')=arg(z'z'')=arg($\frac{c}{a}$)=arg(2)$\equiv 0[2\pi]$

. On a arg(z')+arg(z'')$\equiv 0[2\pi]$ signifie$(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}})+(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}})\equiv 0[2\pi]$ signifie$\left(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv-(\widehat{\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM''}})\,[2\pi]$

signifie [OI) est la bissectrice de $(\overrightarrow{OM'},\overrightarrow{OM''})$.

II).1).$\Delta'=1-1-e^{i2\theta}=(ie^{i\theta})^2$ donc $z_1=1-ie^{i\theta}$ et $z_2=1+ie^{i\theta}$

2).a).$\frac{z_1+z_2}{2}$ =1 =z_I signifie I est le milieu du segment[M_1M_2] signifie $S_I(M_1)=M_2$

.b).On a :IO=I M_1 = I M_2 = 1 signifie M_1 , M_2 et O sont situés sur le cercle ζde rayon 1 et de centre I.

.c).On a $[M_1M_2]$**est** un diamètre de ζ et O$\in\zeta$ donc le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

.d). Le triangle OM_1M_2 est isocèle en O signifie OM_1 = OM_2 signifie $|z_1|=|z_2|$

Le calcul donne sin(θ)=0 signifie θ=0(car $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$).