L. Regueb	**Mathématiques**	Classe : 4èmeM
Prof : Salhi Noureddine	Devoir de Contrôle №1	Le : 20/11/2012 D: 2h

Exercice1(8pts)

Soit f la fonction définie sur $I =]-\infty\ ,\ 1]$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$

1)a) Montrer que f est continue sur I .

b) Montrer que pour tout $x \in I$, $f(x) = \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$.

2)a) Montrer que f est strictement décroissante sur I .

b) Déterminer $f(I)$ et $f([0\ ,1])$.

3)a) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ admet dans $]0\ ,1[$ une unique solution α .

b) Vérifier que 0.7 est une valeur approchée de α à 10^{-1} près .

4) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $\begin{cases} g(x) = f(tg(x)) \text{ si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $\left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = -\frac{4}{9}$ admet une solution $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ,\frac{\pi}{4}\right]$. Calculer $tg(\beta)$.

Exercice2(7pts)

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit f l'application du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe : $z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}}$.

On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et – i .

1) Montrer que f admet deux points invariants que l'on déterminera .

2) Montrer que pour tout nombre complexe z , les points A , M et M' sont alignés .

3) Soit (Γ) le cercle de diamètre $[OB]$.

a) Montrer que pour tout M du plan distinct de O et B on a : $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MO}}\right)\ \ [2\pi]$.

b) En déduire que si $M \in \Gamma$ alors M' appartient à une droite Δ que l'on précisera .

c) Donner une construction du point M' image d'un point M de (Γ) .

Exercice3(5pts)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation , $(E_\theta) : z^2 - 2i\sin(2\theta)z - 1 = 0$ où θ est un réel donné .

1)a) Vérifier que $e^{i2\theta}$ est une solution de (E_θ) .

b) En déduire la deuxième solution , qu'on donnera sous la forme exponentielle .

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation , $(E'_\theta) : z^4 - 2i\sin(2\theta)z^2 - 1 = 0$ où θ est un réel donné .

On donnera les solutions sous forme exponentielle .

3) Montrer que les points images des solutions de (E'_θ) sont les sommets d'un rectangle .

Exercice1

$$I =]-\infty \ , \ 1] \ ; \ \begin{cases} f(x) = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} \ \text{si} \ x \neq 0 \\ f(0) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

1)a) La fonction : $x \longmapsto 1 - x$ est continue et positive sur $]-\infty \ , \ 1] \setminus \{0\}$ alors la fonction : $x \longmapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty \ , \ 1] \setminus \{0\}$ et par suite la fonction : $x \longmapsto -1 + \sqrt{1-x}$ est continue sur $I \setminus \{0\}$,

de plus la fonction : $x \longmapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $I \setminus \{0\}$ alors f est continue sur $I \setminus \{0\}$.

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1+\sqrt{1-x}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-1}{1+\sqrt{1-x}} = -\dfrac{1}{2} = f(0)$ alors f est continue en 0 .

En fin an a : f est continue sur $]-\infty \ , \ 1] \setminus \{0\}$ et f est continue en 0 alors f est continue sur $I =]-\infty \ , \ 1]$

b) Pour tout $x \in]-\infty \ , \ 1] \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{-1+\sqrt{1-x}}{x} = \frac{(-1+\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})}{x(1+\sqrt{1-x})} = \frac{-x}{x(1+\sqrt{1-x})} = \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$

et comme pour , $x = 0$, $\frac{-1}{1+\sqrt{1-x}} = -\frac{1}{2}$ alors pour tout $x \in I =]-\infty \ , \ 1]$, $f(x) = \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$

2)a) La fonction : $x \longmapsto 1 - x$ est strictement décroissante et positive sur I alors la fonction :

$x \longmapsto 1 + \sqrt{1-x}$ est strictement décroissante sur I et par suite la fonction $f: x \longmapsto \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}}$ est

strictement décroissante sur $I =]-\infty \ , \ 1]$.

b) la fonction f est continuet et strictement décroissant sur I donc $f(I) = \left[f(1), \lim\limits_{-\infty} f\right[= [-1 \, , 0[$

f est continue et strictement décroissante sur $[0 \, , 1]$ donc $f([0 \, , 1]) = [f(1), f(0)] = \left[-1 \, , -\frac{1}{2}\right]$

3)a) Soit $x \in [0 \, , 1]$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 1 \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}x + 1 = 0$

On pose $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}x + 1$, $x \in [0 \, , 1]$, les fonctions $x \longmapsto -\frac{1}{2}x + 1$ et $x \longmapsto f(x)$ sont continues

et strictement décroissantes sur $[0 \, , 1]$ donc g est aussi continue et strictement décroissantes sur $[0 \, , 1]$

et $g(0) = \frac{1}{2} > 0$, $g(1) = -\frac{1}{2} < 0$

on a : $\begin{cases} \text{g est continue et strictement décroissante sur } [0 \, , 1] \\ g(0).g(1) < 0 \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{l'équation } g(x) = 0 \text{ admet} \\ \text{une et une solution } \alpha \text{ dans }]0,1[\end{cases}$

b) $\begin{cases} g(0.6) \approx 0.08743 > 0 \\ g(0.8) \approx -0.09098 < 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha \in]0.6 \, , 0.8[$

D'où 0.7 est une valeur approchée de α à 10^{-1} près .

4) $\begin{cases} g(x) = f(tg(x)) \text{ si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$

a) La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ donc:

$$tg\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left]\lim_{-\frac{\pi}{2}^+} tg\ , tg\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] =]-\infty, 1]$$

La fonction tg est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$ et prend ses valeurs dans $]-\infty\ ,\ 1]$ et comme f est continue sur $]-\infty\ ,\ 1]$ alors la fonction composée $g = f \circ tg$ est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right]$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} tg(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f\big(tg(x)\big) = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} g(x) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) \Longrightarrow \text{g est continue à droite en } \frac{\pi}{2}$$

En fin : $\begin{cases} \text{g est continue sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \text{g est continue à droite en } \frac{\pi}{2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{g est continue} \\ \text{sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$

b) $\begin{cases} g\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) = f(1) = -1 \end{cases} \Longrightarrow g\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{-4}{9} < g\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

$\begin{cases} \text{g est continue sur } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \\ g\left(\frac{\pi}{4}\right) < \frac{-4}{9} < g\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$ alors $\begin{cases} \text{il existe au moins un } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \text{tel que } g(\beta) = -\frac{4}{9} \end{cases}$

$g(\beta) = -\frac{4}{9} \iff f(tg(\beta)) = -\frac{4}{9}$; $f(x) = -\frac{4}{9} \iff \frac{-1}{1+\sqrt{1-x}} = -\frac{4}{9} \iff x = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$

D'où $tg(\beta) = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Exercice2

1) Soit M∈P ; $f(M) = M \iff z' = z \iff \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = z \iff z\bar{z}(i - z) = 0 \iff z = 0 \text{ ou } z = i \iff M = O \text{ ou } M = A$

D'où f admet deux points invariants qui sont A et O .

2) $aff\left(\overrightarrow{AM'}\right) = z' - i = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}} - i = \frac{z - i}{1 + z\bar{z}} = \frac{1}{1 + z\bar{z}} aff\left(\overrightarrow{AM}\right)$ donc $\overrightarrow{AM'} = \left(\frac{1}{1 + z\bar{z}}\right)\overrightarrow{AM}$ car $\left(\frac{1}{1 + z\bar{z}}\right) \in \mathbb{R}$

Alors les points A , M et M' sont alignés .

3)a) $z' = \frac{z + iz\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = i\frac{-iz + z\bar{z}}{1 + z\bar{z}} = \frac{1}{1 + z\bar{z}} \times i \times z(\bar{z} - i)$

$\arg(z') \equiv \arg(i) + \arg(z) + \arg(\bar{z} - i)\ \ [2\pi]$ car $\left(\frac{1}{1 + z\bar{z}}\right) \in]0\,, +\infty[$

$\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \arg(z) - \arg(z + i)\ \ [2\pi]$

$\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) - \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{BM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OM}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}}\right)\ \ [2\pi]$

b) $M \in \Gamma \implies \left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MO}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ \ [\pi]$ alors si $M \in \Gamma$ $\arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv 0\ \ [\pi]$

D'où si $M \in \Gamma$, $M' \in (ox) = \Delta$, donc Δ est la droite d'équation $y = 0$.

c) si $M \in \Gamma$ alors $\begin{cases} M' \in \Delta = (Ox) \\ \text{les points } A\,, M \text{ et } M' \text{sont alignés} \end{cases}$

D'où M' est l'intersection de la droite (AM) avec l'axe des abscisses .

Exercice3

1)a) On pose $P(z) = z^2 - 2i\sin(2\theta)z - 1$, $z \in \mathbb{C}$

$$P\left(e^{i2\theta}\right) = e^{i4\theta} - 2i\sin(2\theta)e^{i2\theta} - 1 = e^{i2\theta}\left(e^{i2\theta} - 2i\sin(2\theta)\right) - 1 = e^{i2\theta}(\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)) - 1$$

$= e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 1 = 1 - 1 = 0$, D'où $z' = e^{i2\theta}$ est une solution de (E_θ) .

b) Soit z'' l'autre solution de (E_θ) , et comme z'z'' = -1 alors $z'' = \frac{-1}{z'} = \frac{-1}{e^{i2\theta}} = e^{i(\pi - 2\theta)}$

2) (E'_θ) : $z^4 - 2i\sin(2\theta)z^2 - 1 = 0$

On pose $Z = z^2$, $(E'_\theta) \iff Z^2 - 2i\sin(2\theta)Z - 1 = 0$

$$\iff \begin{cases} Z = e^{i2\theta} \\ \text{ou} \\ Z = e^{i(\pi - 2\theta)} \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 = e^{i2\theta} \\ \text{ou} \\ z^2 = e^{i(\pi - 2\theta)} \end{cases} \iff \begin{cases} z^2 = \left(e^{i\theta}\right)^2 \\ \text{ou} \\ z^2 = \left(e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}\right)^2 \end{cases}$$

$$\iff z = e^{i\theta} \text{ ou } z = -e^{i\theta} \text{ ou } z = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)} \text{ ou } z = -e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$

En fin les solutions de (E'_θ) sous forme exponentielle sont :

$z_1 = e^{i\theta}$, $z_2 = e^{i(\pi + \theta)}$, $z_3 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$ et $z_4 = e^{i\left(-\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$

3) On désigne par M_1 , M_2 , M_3 et M_4 les points images respectives des nombres complexes z_1, z_2, z_3 et z_4

On a : $O = M_1 * M_2 = M_3 * M_4$, donc $M_1M_3M_2M_4$ est un parallélogramme de centre O .

De plus $[M_1M_2]$ et $[M_3M_4]$ sont des diamètres du cercle trigonométrique alors $M_1M_2 = M_3M_4 = 2$

Conclusion : $M_1M_3M_2M_4$ est un parallélogramme dont les diagonales sont isométriques alors $M_1M_3M_2M_4$ est un rectangle .