Prof	Mechmeche Imed	Devoir de contrôle N°1	Matière	Maths
Lycée	Borj-cedria		Date	05/11/2012
Niveau	$4^{ème}$ Maths1		Durée	2 h

Exercice 1 : (5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}} & si\ \ x\in\ ]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\\ \frac{\sin(\pi x)}{\pi(1-x)} & si\ x\ \in[-1,1[\end{cases}$

1) Calculer la limite de f en $-\infty$, en $+\infty$, à gauche en -1
2) Calculer la limite de f à droite en 1
3) Sachant que f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$ et strictement croissante sur $]1,+\infty[$, déterminer $f(\,]-\infty,-1[\,)$ et $f(\,]1,+\infty[\,)$
4) Montrer que f n'est pas prolongeable par continuité en 1.
5) Monter que l'équation $f(x)=\frac{1}{\pi}$ admet au moins une solution $\alpha\ \in\left]\frac{1}{6},\frac{1}{2}\right[$
6) Soit h la restriction de f à $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ et $g=h\circ h$
   a- Déterminer l'ensemble de définition E de g
   b- Calculer les limites de g aux bornes de E

Exercice 2 : (5 pts)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. Soit f l'application du plan dans lui-même qui à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que $z'=\frac{2(\,i-\bar{z}\,)}{i+z}$; $z\neq -i$. On considère les points $B(-i)$, $C(i)$, $A(2)$ et $N(\bar{z}\,)$
On désigne par $\mathcal{C}_{(O,2)}$ le cercle de centre O et rayon 2

1) Montrer que $M'\in\mathcal{C}_{(O,2)}$.
2) a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $z'=2$.
   b- En déduire l'ensemble des antécédents de A par f.
3) a- Montrer que $\frac{z'-2}{\bar{z}-i}$ est un réel.
   b- En déduire que les droites (AM') et (CN) sont parallèles.
   c- Expliquer comment construire M'connaissant M
4) La droite (AC) recoupe $\mathcal{C}_{(O,2)}$ en E. Montrer que $f\big((AB)\setminus\{B\}\big)=\{E\}$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit l'équation (E_θ) : $z^2+(2i\,sin\theta-2)z-2e^{i\theta}-1=0$, $\theta\in\,]-\pi\,,\,\pi[$.

1) vérifier que $(2i\,sin\theta-2)^2+8e^{i\theta}+4=(2cos\theta+2)^2$
2) Résoudre alors (E_θ).
3) Soient les points $A(1)$, $M\left(-e^{i\theta}\right)$ et $N\left(2+e^{-i\theta}\right)$

   a-Montrer que $Z_{\overrightarrow{AM}}=-2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$ et $Z_{\overrightarrow{AN}}=2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

   b- En déduire que le triangle AMN est isocèle en A.
4) Pour quelles valeurs de θ le triangle AMN est-il équilatéral ?

Exercice 4 : (6 pts)

Soit la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x)=1+\frac{8}{x+1}$.

et $(U_n)_{n\geq0}$ la suite définie par : $\begin{cases} U_0=7 \\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $2\leq U_n\leq 7$
2) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$ $V_n=U_{2n}$, $W_n=U_{2n+1}$.

   a- Montrer que la suite V est décroissante et que W est croissante.

   b- En déduire que les suites V et W sont convergentes.
3) On désigne par a et b les limites respectives des suites V est W

   a- Montrer que $a=1+\frac{8}{b+1}$ et que $b=1+\frac{8}{a+1}$

   b- En déduire que $a=b=3$ et que la suite U converge vers 3.
4) a- Montrer que $|U_{n+1}-3|\leq\frac{2}{3}|U_n-3|$

   b- En déduire que $|U_n-3|\leq 4\left(\frac{2}{3}\right)^n$

   c- Retrouver alors la limite de la suite U.

Bon travail.