Lycée H. Souk Jerba Prof : Loukil Mohamed	Bac blanc Durée : 3 Heures	4 Sc - informatique 16 Mai 2011

EXERCICE N : 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes , une seule des trois réponses proposées est exacte .Sans justification , le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie .

1) Les nombres complexes Z_1 et Z_2 tels que : $Z_1 + Z_2 = 2\,i$ et $Z_1 . Z_2 = 1 - i$ sont les solutions de l'équation :

a) $Z^2 + 2\,i\,Z + 1 - i = 0$ **b)** $Z^2 - 2\,i\,Z - 1 + i = 0$ **c)** $Z^2 - 2\,i\,Z + 1 - i = 0$

2) Soit A et B deux points distincts du plan complexe d'affixes respectives Z_A et Z_B .
Si A et B sont symétriques par rapport à l'axe des imaginaires purs , alors :

a) $Z_B = - Z_A$ **b)** $Z_B = \overline{Z}_A$ **c)** $Z_B = - \overline{Z}_A$

3) Soit ($\boldsymbol{V_n}$) la suite définie sur IN par : $V_n = (-2)^n + 3^n$, alors :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ **b)** $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 0$ **c)** ($\boldsymbol{V_n}$) n'a pas de limite

4) La valeur moyenne de la fonction logarithme népérien sur [1 , e] est égal à :

a) $\frac{1}{e-1}$ **b)** 1 **c)** 0

EXERCICE N : 2 (4 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = \frac{-1}{2} \\ U_{n+1} = U_n^2 + 2\,U_n \end{cases}$

1) Montrer que pour tout $n \in$ IN on a : $-1 < U_n < 0$.

2) a) Montrer que la suite (U_n) est décroissante sur IN .
b) Déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite .

3) On considère la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = \ln(1 + U_n)$.

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) Exprimer V_n en fonction de n puis déduire que $U_n = e^{-(2)^n \ln 2} - 1$.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

EXERCICE N : 3 (4 points)

1) Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé R (O , $\vec{u}$, $\vec{v}$) **(Unité : 2 cm)** , on donne les point A , B et C d'affixes respectives : $Z_A = \sqrt{3} + i$, $Z_B = 2\,i$ et $Z_C = -\sqrt{3} + i$.

a) Montrer que les points A , B et C appartiennent a un même cercle ($\mathscr{C}$) de centre O .

b) Tracer le cercle ($\mathscr{C}$) et placer les points A , B et C dans le repère R .

c) Montrer que le quadrilatère OABC est un losange .

2) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation (E) :* $Z^2 - 2i\,Z - 4 = 0$.

3) *Soit P la fonction définie sur* $\mathbb{C}$ *par :* $P(Z) = Z^3 - 4iZ^2 - 8Z + 8i$.

a) *Vérifier que* $P(2i) = 0$.

b) *Déterminer le nombre complexe* α *tel que :* $P(Z) = (Z - 2i)(Z^2 + \alpha Z - 4)$

c) *Résoudre alors , dans* $\mathbb{C}$ *, l'équation* $P(Z) = 0$.

EXERCICE N : 4 (3.5 points)

A) *On considère dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation (E) :* $10x - 3y = 5$.

1) *Montrer que si (x , y) est une solution de (E) alors* $(x \wedge y) = 1$ *ou* $(x \wedge y) = 5$.

2) a) *Vérifier que : (5 , 15) est une solution de (E) .*

b) *Résoudre dans* $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *l'équation (E) .*

B) *Un jeu est organisé de la façon suivante :*

le joueur tire une boule dans un panier où sont placé 10 boules blanches et 10 boules noires .
Si le joueur a obtenu une boule blanche ,il gagne 30 Dinars si non il perds 9 Dinars .
Un joueur a gagner une somme de 15 Dinars en tirant ***X*** *boules blanches et* ***Y*** *boules noires .*

1) *Ecrire une équation reliant* ***X*** *et* ***Y*** .

2) *Déterminer alors les valeurs de* ***X*** *et* ***Y*** .

EXERCICE N : 5 (5 .5 points)

A) *Soit la suite* (J_n) *définie sur IN* par :* $J_n = \int_1^e x \ln^n(x)\,dx$.

1) a) *Montrer que :* $J_1 = \dfrac{e^2+1}{4}$.

b) *A l'aide d'une intégration par parties , montrer que pour tout* $n \in IN^*$; $J_{n+1} = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n+1}{2} J_n$.

B) *Dans l'annexe ci-jointe , on a représenté dans un repère orthonormé* $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ *la courbe* $(\mathcal{C})$ *de la fonction f définie sur [1 ; 3] par :* $\boldsymbol{f(x) = x\ln^2(x)}$ *et la demi-tangente à* $(\mathcal{C})$ *au point d'abscisse 1 . On considère la droite* Δ *d'équation : y = x et la droite* $(\mathscr{D})$ *d'équation :* $y = 1 - x$.

1) En utilisant le graphique :

a) *Montrer que f réalise une bijection de [1 ; 3] sur* $[0 ; 3\ln^2(3)]$.

b) *Résoudre dans [1 ; 3] l'équation :* $f(x) = f^{-1}(x)$.

2) *Tracer la courbe* $(\mathcal{C}')$ *de la fonction* f^{-1} *en précisant la demi-tangente au point d'abscisse 0 .*

3) a) *En utilisant la suite* (J_n)*, calculer l'aire* $\mathcal{A}$ *de la partie du plan limitée par la courbe* $(\mathcal{C})$ *,*

l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = 1$ *et* $x = e$.

b) *En déduire l'aire* $\mathcal{A}'$ *de la partie du plan limitée par la droite* $(\mathscr{D})$ *et les courbes* $(\mathcal{C})$ *et* $(\mathcal{C}')$.

Nom et Prénom :

Annexe à compléter et à rendre avec la copie