Lycée thélèpte
01 décembre 2010

Devoir de contrôle n°1

Durée: 2 heures

4ème Maths
Enseignant : H.Salem

Exercice1 : (**3points**)

Donner la réponse correcte . Aucune justification n'est demandée.

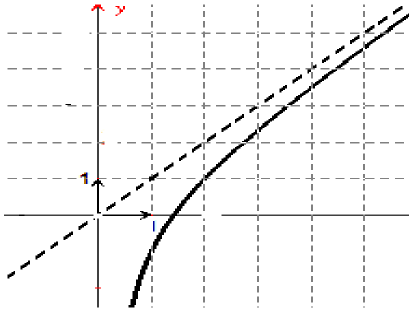
1) La courbe (C) ci – dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]0,+\infty[$. La droite Δ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x\to 0^+} xf(\frac{1}{x}) =$:

a) 1

b) 0

c) $+\infty$



2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Dans la figure ci – dessous, (C) est un cercle de centre O milieu de $[AC]$ et B est un point de (C) tel que OAB est un triangle équilatérale.

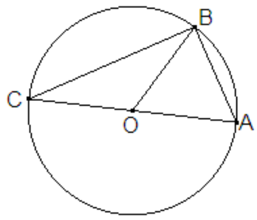
On pose a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

$\frac{b-c}{b-a} =$:

a) $-2i$

b) $-i$

c) $-i\sqrt{3}$



3) Si une suite (U_n) est divergente alors l'une au moins des suites (U_{2n}) ou (U_{2n+1}) est divergente.

a) vrai ; b) faux

Exercice 2 : (**3 points**)

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1) Dresser le tableau de variation de g sur IR.
2) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1,2[$.
3) Déterminer le signe de $g(x)$ sur IR.

Exercice 3 : (**6points**)

On considère la suite (U_n) défini par $U_0 = 1$ et pour tout entier n ;

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2}.$$

1) a) Montrer que pour tout entier n, $U_n > 0$.
b) Montrer que (U_n) est décroissante.
c) Déduire que (U_n) est convergente et détermine sa limite.

2) soit (V_n) défini sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{\sqrt{U_n}}$.

$iiiiiiia)$ *Montrer que* (V_n) *est une suite arithmétique de raison égale à* 1.
$b)$ *On déduire* V_n *puis* U_n *en fonction de* n *et retrouver* $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3) *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.
$a)$ *Montrer que la suite* (S_n) *est croissante.*
$b)$ *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.
$c)$ *Montrer que* $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1}$. *En déduire que la suite* (S_n) *est convergente et donner un encadrement de sa limite.*

Exercice 4 : (**8 points**)

Pour tout réel θ *de* $]-\pi, \pi]$, *On considère la fonction* f_θ *définie par* : p

pour tout $z \in \mathbb{C}\backslash\{e^{i\theta}\}$, $f_\theta(z) = \dfrac{1 + ze^{i\theta}}{e^{i\theta} - z}$.

1) *Vérifier que si* $\theta \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$ *alors* f_θ *est contante.*
2) *On pose* $\theta = 0$.
$a)$ *Montrer que pour tous nombres complexes* z *et* z' *de* $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$:
$f_0(z) = z'$ *si et seulement si* $z = -f_0(-z')$.
$b)$ *Montrer que pour tout* $\alpha \in IR\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \dfrac{i}{\tan(\frac{\alpha}{2})}$.
$c)$ *Déterminer les raines carrés de* $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.
$d)$ *Utiliser les questions* $a), b)$ *et* $c)$ *pour résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation*:
$(1+z)^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$.

3) *On suppose que* $\theta \in IR \setminus \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par A, B, M *et* M' *les points d'affixesrespectives* $e^{i\theta}, -e^{-i\theta}$, z *et* $z' = f_\theta(z)$
$a)$ *Montrer que pour tout* $M \neq A$ *et* $M \neq B$, $(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv \theta + \pi + (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}})[2\pi]$.
$b)$ *Pour* $\theta = \frac{\pi}{4}$, *déterminer et construire l'ensemble* Γ *des points* M *lorsque* M' *décrit la demi – droite d'équation* : $\begin{cases} y = -x \\ x > 0 \end{cases}$.

Bon Travail

Correction

Exercice1 : (3points)

1) a) $\lim\limits_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$

$\lim\limits_{x\to0^+} xf\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$ car la droite $\Delta : y = x$ est une asymptote oblique à (C)au voisinage de $+\infty$

2) c) $\frac{b-c}{b-a} = \left|\frac{b-c}{b-a}\right| e^{i\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right)} = \frac{BC}{BA}e^{-\frac{i\pi}{2}}$. Or $\frac{BC}{BA} = \frac{BC}{\frac{1}{2}AC} = 2\frac{BC}{AC} = 2\cos\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$.

Ainsi $\frac{b-c}{b-a} = \sqrt{3}e^{-\frac{i\pi}{2}} = -i\sqrt{3}$.

3) Faux. Contre exemple : $U_n = (-1)^n$.

(U_n) est divergente mais (U_{2n}) et (U_{2n+1}) convergent respectivement vers 1 et -1.

Exercice 2 : (3 points)

$g(x) = 4x^3 - 3x - 8.$

1) g est dérivable sur IR et pour tout réel x, $g'(x) = 12x^2 - 3$.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$	α	$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	-9	$\nearrow$ 0	$+\infty$

2) D'après le tableau de variation de g : g(x) < 0 $\forall$ x $\in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$.

Sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, g est continue et strictement croissante donc l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α.

De plus g(1) = -7< 0 et g(2) = 18 > 0, donc 1< α < 2.

3)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

Exercice 3 : (6points)

1) a) Montrons que pour tout entier $n, U_n > 0$.

Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$.

Supposons que $U_n > 0$ et montrons que $U_{n+1} > 0$.

Il est clair que si $U_n > 0$, $U_{n+1} = \frac{U_n}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2} > 0$. D'où $U_n > 0 \; \forall \, n \geq 0$.

b) $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\left(1+\sqrt{U_n}\right)^2} < 1$ D'où (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est décroissante et minorée par 0 donc converge vers un réel L tel que

$L \geq 0$ et $\dfrac{L}{(1+\sqrt{L})^2} = L \Leftrightarrow 1+\sqrt{L} = 1 \Leftrightarrow L = 0.$

2) **a)** Pour tout entier n, $V_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{U_{n+1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{U_n}{(1+\sqrt{U_n})^2}}} = \frac{1+\sqrt{U_n}}{\sqrt{U_n}} = \frac{1}{\sqrt{U_n}} + 1 = 1 + V_n$ donc

(V_n) est une suite géométrique de raison 1.

b) Pour tout entier n, $V_n = V_0 + n = 1 + n$.

$V_n = \dfrac{1}{\sqrt{U_n}} \Longrightarrow U_n = \frac{1}{{V_n}^2} = \frac{1}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

3) $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) pour tout $\in \mathbb{N}^*$,

$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} U_k - \sum_{k=0}^{n} U_k = U_{n+1} > 0.$

D'où (S_n) est croissante.

b) On remarque que $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{n(n+1)}$. Or $U_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+n}$. Ainsi

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$.

c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k = U_0 + \sum_{k=1}^{n} U_k \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) \leq 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$\Longrightarrow S_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots\ldots + \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ \ldots\ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \leq 2 - \frac{1}{n+1}.$$

(S_n) est croissante et $S_n \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donc (S_n) converge vers un réel ℓ tel que $0 \leq \ell \leq 2$.

Exercice 4 : (8 points)

1) $f_{-\frac{\pi}{2}}(z) = \dfrac{1 + ze^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{-i\frac{\pi}{2}} - z} = \dfrac{1-iz}{-i-z} = \dfrac{i(-i-z)}{-i-z} = i$, $f_{\frac{\pi}{2}}(z) = \dfrac{1 + ze^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{2}} - z} = \dfrac{1+iz}{i-z} = \dfrac{i(-i+z)}{i-z} = -i.$

2) Pour $\theta = 0$, $f_0(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$.

a) Pour tous z et z' de $\mathbb{C}\backslash\{-1,1\}$, $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z' = \dfrac{1+z}{1-z} \Leftrightarrow z' - zz' = 1 + z$

$\Leftrightarrow z(1+z') = z' - 1 \Leftrightarrow z = \frac{z'-1}{z'+1}$. Or $-f_0(-z') = -\frac{1-z'}{1+z'} = \frac{z'-1}{z'+1}$.

D'où $f_0(z) = z' \Leftrightarrow z = -f_0(-z')$.

b) Pour tout $\alpha \in \mathrm{IR}\backslash\{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $f_0(e^{i\alpha}) = \dfrac{1+e^{i\alpha}}{1-e^{i\alpha}} = \dfrac{2\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}}{-2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}} = \dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{-i\sin\frac{\alpha}{2}} = \dfrac{i}{\tan\frac{\alpha}{2}}$.

Rq :

Pour tout $\alpha \in \mathrm{IR}$.

$$1 + e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{-i\alpha}{2}}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = 2\cos\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

$$1 - e^{i\alpha} = e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = \left(e^{\frac{-i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}} = -2i\sin\frac{\alpha}{2}\, e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

c) Soit $u^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2}\, e^{\frac{i\pi}{4}} = e^{\frac{i\pi}{4}} \Leftrightarrow u = e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $u = -e^{\frac{i\pi}{8}} = e^{\frac{i9\pi}{8}}$.

d) $(1+z)^2=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1+z}{1-z}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \Leftrightarrow \frac{1+z}{1-z}=e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $\frac{1+z}{1-z}=e^{\frac{i9\pi}{8}}$

(d'après2) c)) $\Leftrightarrow\ f_0(z)=e^{\frac{i\pi}{8}}$ ou $f_0(z)=e^{\frac{i9\pi}{8}} \Leftrightarrow z=-f_0\left(e^{\frac{i\pi}{8}}\right)$ ou $z=-f_0\left(e^{\frac{i9\pi}{8}}\right)$

(d'après2) a)) $\Leftrightarrow z=-\frac{i}{\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ ou $z=-\frac{i}{\tan\left(\frac{9\pi}{8}\right)}=\frac{i}{\tan\frac{\pi}{8}}$. (d'après 2) b)).

3) a) $\forall\, \theta \in IR \setminus \left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\}$, $f_\theta(z)=\dfrac{1+ze^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}=\dfrac{e^{i\theta}(e^{-i\theta}+z)}{e^{i\theta}-z} \Leftrightarrow z_{M'}-z_O=-e^{i\theta}\,\frac{z-(-e^{-i\theta})}{z-e^{i\theta}}$

$\Longrightarrow$ $\arg(z_{M'}-z_O)\equiv\arg\left[e^{i\theta}\,\dfrac{z-(-e^{-i\theta})}{e^{i\theta}-z}\right][2\pi]$

$\Longrightarrow$ Pour tout $M\neq A$ et $M\neq B$, $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv\theta+\pi+\arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\right)[2\pi]$

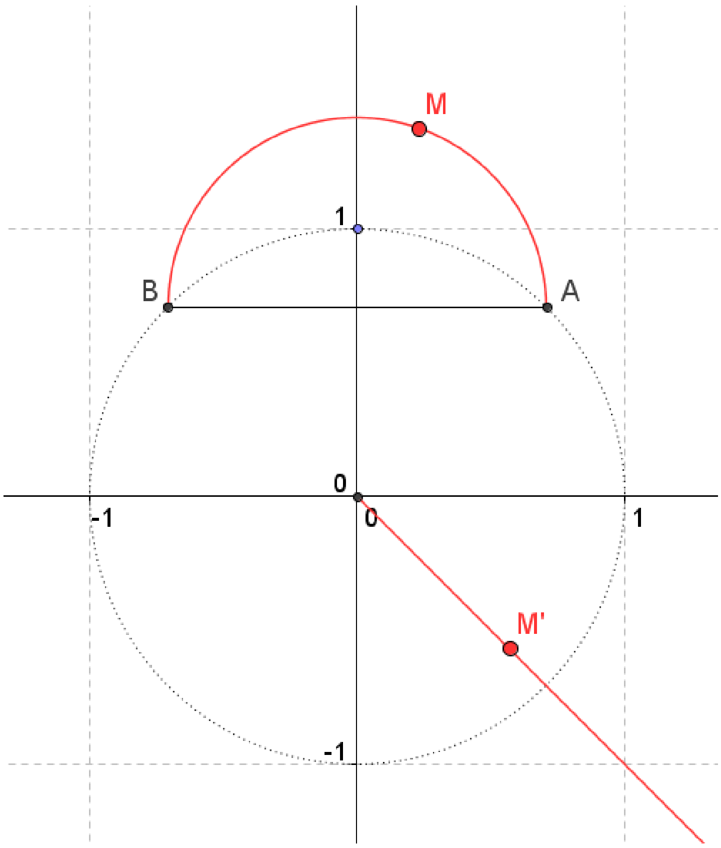
$\Longrightarrow$ Pour tout $M\neq A$ et $M\neq B$, $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv\theta+\pi+(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})[2\pi]$.

b) Si $\theta=\frac{\pi}{4}$: $z_A=e^{i\theta}=e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_B=-e^{-i\theta}=-e^{-i\frac{\pi}{4}}$

Si M' décrit la demi-droite d' équation : $\begin{cases} y=-x \\ x>0 \end{cases}$

alors $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}})\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$ et d'après la question précédente,

$(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}})\equiv-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}-\pi[2\pi]\equiv-\frac{3\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et par suite M appartient au demi cercle de diamètre [AB] privés des points A et B.



Fin