Lycée Nebeur — **Devoir de synthèse n°2** — **Prof : J_Naceur**

07-03-2012 — **Mathématique** — **4SC I $_2$**

Exercice n° 1 : (4pts)

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $\ln(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{1}{2}$

2) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \ln x) = +\infty$

3) L'ensemble de définition de la fonction f : $x \mapsto \ln(2-x)$ est : $]-\infty, 2]$

4) Pour tout entier naturel non nul n, les entiers 2n+1 et n sont premier entre eux .

Exercice n° 2 : (4pts)

On donne le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $]1,+\infty[$.

x	1		2		$+\infty$
f	$+\infty$ $+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

1) a) Donner $\lim_{x\to 1^+} f(x)$; $f'(2)$ et $f(2)$

   b) Donner le tableau de signe de f'

2) On donne $f'(3) = \frac{1}{2}$

   On suppose que : $f(x) = ax + b + c\ln(x-1)$

   où a , b et c trois réels

   a) Calculer f'(x) .

   b) Montrer $2a + b = -1$; $a - c = 0$ et $2a - c = 1$

   c) En déduire l'expression de f .

3) On prendra dans la suite : $f(x) = x - 3 - \ln(x-1)$

   On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $[2,+\infty[$

   a) Montrer que g réalise une bijection de $[2,+\infty[$ sur $[-1,+\infty[$

   b) Calculer g(3) . Montrer que g^{-1} dérivable en (-ln(2)) et calculer $(g^{-1})'(-\ln 2)$.

   c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1,+\infty[$

Exercice n° 3 : (4pts)

On considère la matrice A : $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

1) Calculer dét(A). En déduire que A est inversible.

2) a) Calculer $Com(A)$

   b) En déduire $A^{-1} = -\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & -7 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

3) On donne le système (S) $\begin{cases} x + 3y + 2z = 10 \\ x + y + z = 30 \\ x + 4y + 5z = 40 \end{cases}$

   a) Donner l'écriture matricielle de (S).

   b) Résoudre (S) .

Exercice n° 4 : (4pts)

1) On considère dans $IZ \times IZ$ l'équation (E) : $17x - 11y = 2$

   a) Justifier que (E) admet des solutions entières .

   b) Vérifier que le couple (4, 6) est solution de (E)

   c) Résoudre l'équation : $17x = 11y$.

   d) En déduire que les solutions de (E) sont de la formes $(11k+4, 17k+6)$ $k \in IZ$

2) Un groupe de touriste entre dans un magasin et dépense 20 pièces .
Les femmes ont dépensé chacune 11 pièces et chaque homme a dépensé 17 pièces
Déterminer le nombre de femmes et le nombre d'hommes dans ce groupe .

Exercice n° 5 : (4pts)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 - \frac{\ln(x)}{x}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) Déterminer : $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

   b) Montrer que la droite D : $y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à (C) .

   c) Etudier la position relative de (C) et D .

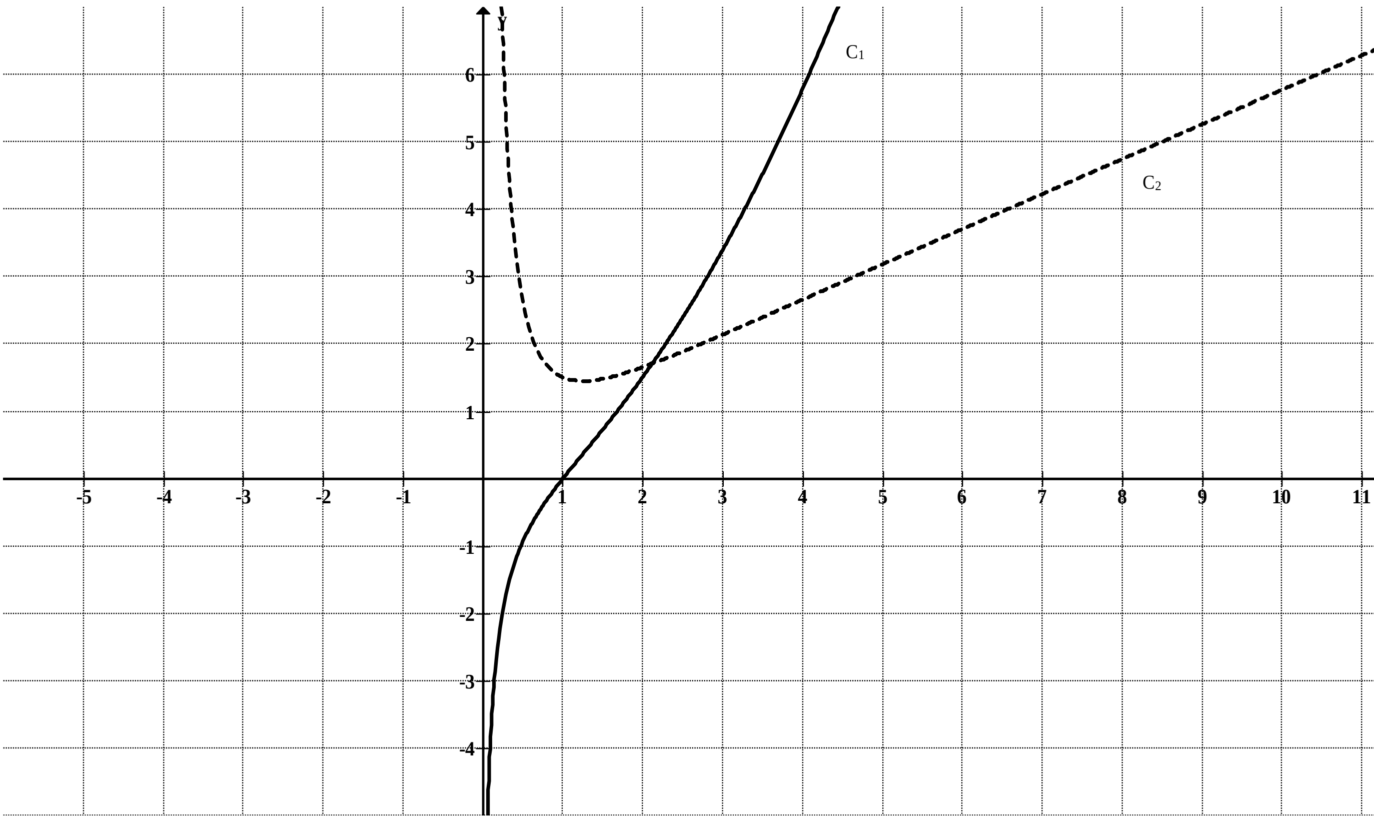
2) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$; $f'(x) = \frac{x^2 - 2 + 2\ln(x)}{2x^2}$

3) a) Justifier que f admet au moins une primitive sur $]0,+\infty[$.

   b) L'une des fonctions suivantes est la primitive de f qui s'annule en 1 ; La quelle ?

$F(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{3}{4}$; $G(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \frac{5}{4}$; $H(x) = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{1}{2}\ln(\ln x) - \frac{3}{4}$

3) On donne ci-dessous la courbe de f et celle de sa primitive . Préciser celle de f .



Bon travail