**Exercice1 :**

Soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+ e^{-x})$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Montrer que f est dérivable sur IR et pour tout $x \in$IR, $f'(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+e^{x}}$.

b. Etudier les variations de f.

c. Montrer que la droite $\Delta$ : $y = -\frac{1}{2}x$ est une asymptote à (C) en $-\infty$.

Etudier la position relative de (C) et $\Delta$.

e. Tracer (C) et $\Delta$.

2. Montrer que l'équation f(x) = x admet dans IR une unique solution $\alpha$ et que $0 < \alpha < 1$.

3.a. Montrer que pour tout $x \geq 0$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.

b. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$.

4. Soit $(U_n)$ la suite définie sur IN par $U_0 = 0$ et pour tout $n \in$IN, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a. Montrer que pour tout $n \in$IN, $U_n \geq 0$.

b. Montrer que pour tout $n \in$IN, $|U_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|U_n-\alpha|$.

c. En déduire que pour tout $n \in$IN, $|U_n-\alpha| \leq (\frac{1}{4})^n$ et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

**Exercice2 :**

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{e^{2x}}{1+e^{x}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

**A]**1. Dresser le tableau de variation de f.

2.a. Déterminer les branches infinies de (C).

b. Tracer (C).

3.a. Montrer que f est une bijection de IR sur $IR_+^*$.

b. Tracer la courbe (C') représentative de la fonction réciproque $f^{-1}$de f.

c. Calculer $f^{-1}(x)$ pour x > 0.

4.a. Vérifier que pour tout réel x, on a : $f(x) = e^{x} - \frac{e^{x}}{1+e^{x}}$.

b. Soit $\lambda$ un réel strictement négatif.

Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine limité par la courbe (C'), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $y = \lambda$ et y = 0.

**B]** Pour tout entier naturel non nul n et pour tout réel négatif, on pose $F_n(x) = \int_x^0 \frac{e^{nt}}{1+e^{t}}dt$.

1.a. Calculer $F_1(x)$ et déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty} F_1(x) = \ln 2$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F_2(x)$.

2.a. Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $F_{n+1}(x)+F_n(x) = \frac{1}{n}(1-e^{nx})$.

b. Montrer par récurrence sur n, que $F_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$.

Dans la suite, on pose $R_n = \lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)$.

3.a. Vérifier que pour tout réel $t \leq 0$, $2e^{t} \leq 1+e^{t} \leq 2$.

b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 0$ et pour tout réel $x \leq 0$, on a :

$$\frac{1}{2n}(1-e^{nx}) \leq F_n(x) \leq \frac{1}{2(n-1)}(1-e^{(n-1)x}).$$

c. En déduire un encadrement de $R_n$ pour $n \geq 2$.

4. Pour tout réel négatif x et pour tout entier naturel non nul, on pose $G_n(x) = (-1)^n\int_x^0 e^{nt}dt$.

a. Calculer $G_n(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} G_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n}$.

b. Montrer que $G_1(x)+G_2(x)+...+G_n(x) = -F_1(x)+(-1)^n F_{n+1}(x)$.

5. On pose, pour tout entier naturel non nul n, $U_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

a. Montrer que $U_n = \ln 2 + (-1)^{n+1}R_{n+1}$.

b. Montrer que la suite $(U_n)$ est converge et trouver sa limite.

**Exercice3 :**

1.a. Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^{\tan x}\frac{dt}{1+t^2}$.

Montrer que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer f'(x).

En déduire que pour tout $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, f(x) = x.

b. Calculer l'intégrale $K = \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)dt$.

2. Pour tout entier $n \geq 2$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}\,dt$.

Montrer que : $1 \leq U_n \leq \sqrt[n]{2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

3.a. Montrer que pour tout $u \in [0, +\infty[$, on a : $u \leq e^u - 1 \leq ue^u$.

b. En déduire que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{1}{2}x^2e^x$.

4.a. Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$, on a : $0 \leq \sqrt[n]{1+t^2} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+t^2) \leq \dfrac{\sqrt[n]{2}}{2n^2}(\ln 2)^2$.

b. En déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} n(U_n - 1)$.

**Exercice4 :**

Soit la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \ln(1+e^{-2t})dt$.

On désigne par $(\Gamma)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1.a. Montrer que F est dérivable sur IR et calculer F'(x).

b. Donner une équation de la tangente T à la courbe $(\Gamma)$ au point d'abscisse 0.

2.a. Montrer que pour tout réel $t \geq 0$, $\dfrac{1}{(1+t)^2} \leq \dfrac{1}{1+t} \leq 1$.

b. En déduire que pour tout réel $x \geq 0$, $\dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$.

3.a. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, $\frac{1}{2}\left[\ln 2 - \ln(1+e^{-2x})\right] \leq F(x) \leq \frac{1}{2}\left[1-e^{-2x}\right]$.

b. En déduire que F admet en $+\infty$ une limite finie L dont on donnera un encadrement.

4.a. Montrer que pour tout réel t, $\ln(1+e^{-2t}) \geq -2t$.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{F(x)}{x}$.

c. Dresser le tableau de variation de F et donner une allure de $\Gamma$.(On prendra $L \approx 0,4$).

**Exercice5 : (Vrai- Faux)**

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^x = 0$.

2. Les solutions sur IR de l'équation différentielle $y'' = 4y$ sont les fonctions f définies par :

$f(x) = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$, où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes.

3. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(1+e^{\frac{1}{x}})}{x^2} = +\infty$.

4. Soit $m \in$ IR, on considère l'équation d'inconnue réelle x, (E) : $e^{2x} - 2m\,e^x + 1 = 0$.

(E) n'admet pas de solutions pour $m \in ]-\infty, -1[$.