Lycée S.Menzel Hayet	**Sujet de Révision N°1**	*Prof :* Afli Ahmed
Mai 2011	E.f exponentielle + Suite + Complexe	4 ^{eme}A

❖ **<u>Exercice 1 :</u>** (Etude de fonction exponentielle)

Les trois parties sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur R par $\boxed{\mathbf{f(x) = (ax+b)e^{x-1} + c}}$, ou a, b , c trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.

- La courbe C représentative de f dans un repère orthonormé est représenté ci-dessous.
- La courbe C passe par le point **A(1 ;5)** , elle admet la droite D comme tangente en ce point.
- Le point **B(0 ;2)** appartient à la droite D.
- La courbe C admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$.

Partie A

1. a. Préciser les valeurs de f(1) et f '($-\frac{1}{2}$) .

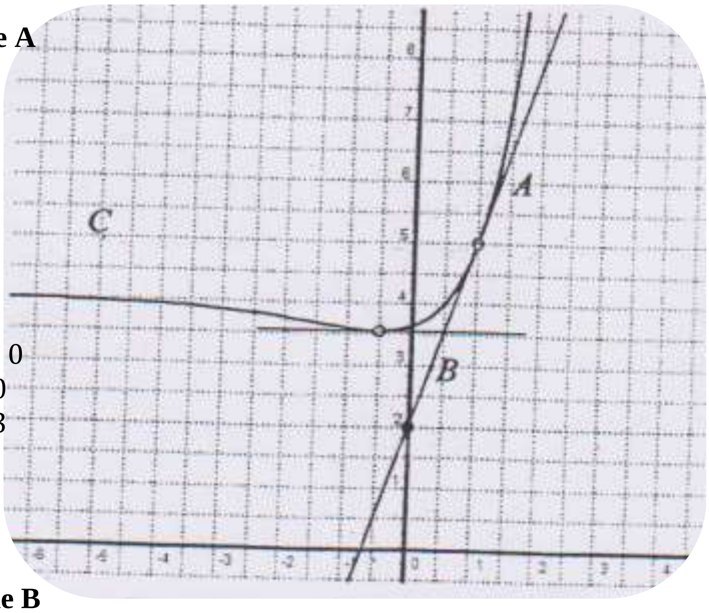
   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite D.

   En déduire f '(1) .

2. Montrer que ,pour tout réel x , f '(x) = (ax +a+b)e^{x-1}

3. Montrer que a, b et c vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c=0 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$

   Déterminer les valeurs de a, b et c.



Partie B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel x , **f(x) = (2x-1)e^{x-1}+4**.

1. a. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Donner pour tout réel x, l'expression de **f'(x)** .

   c. Etablir le tableau de variation de f .déterminer le signe de f(x) pour tout réel x .

   d. Montrer que l'équation **f(x) = 6** admet une unique solution réel α sur l'intervalle [1 ;2] .

Partie C

1. On considère la fonction F définie pour tout réel x par : **F(x) = (2x-3)e^{x-1}+4x**.
   Montrer que F est une primitive de f sur R.

2. Soit A la partie du plant située entre la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équation x=0 et x = 1.

   Calculer l'aire de la partie A .

- **Exercice 2 :** (4M-2008)

Soit f la fonction définie sur R par **f(x) = (1-x)e^{2x}.**

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O ;i,j).

1) Dresser le tableau de variation de f.
2) a- Montrer que la courbe C_f admet un point d'inflexion I qu'on précisera.
   b- Donner une équation de la tangente T à la courbe C_f au point I.
   c-Tracer T et C_f.
3) Calculer l'aire du domaine limité par la courbe C_f,l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives x=0 et x=1.
4) Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $\boldsymbol{I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{2x} dx}$.
   a- Montrer que pour tout n $\in N^*$ on a
   $$\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+1}$$
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.
   b- Montrer que pour tout n $\in N^*$ on a : $\boldsymbol{2I_{n+1} = (n+1)I_n - 1}$.
   En déduire $\lim_{n\to+\infty} nI_n$.
5) Pour tout n $\in N^*$ on pose $U_n = \frac{2^n}{n!} I_n$.
   a- Montrer par récurrence que pour n $\in N^*$, $\frac{2^{n-1}}{n!} \leq 1$.
   b- En déduire que pour tout n $\in N^*$, $U_n \leq \frac{2e^2}{n+1}$.
   c- Calculer alors $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

- **Exercice 3 :**

1) On considère dans C l'équation (E) : $\mathbf{2z^2 + (7 + i\sqrt{3})z - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0}$.
   a- Montrer que (E) admet une solution réelle que l'on déterminera.
   b- Donner alors l'autre solution de (E) .
2) a- Calculer $(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i)^2$.
   c- Résoudre dans C l'équation (E') : $\mathbf{2z^4 + (7 + i\sqrt{3})z^2 - 4(1 - i\sqrt{3}) = 0}$.
3) Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormé direct (O,u,v) ;on considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2i \quad et \; z_B = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ et on désigne par I le milieu du segment [OA].
   a- Ecrire z_B sous forme exponentielle.
   b- Placer I et B et montrer que le triangle OIB est isocèle.

- **Exercice 4 :**

On considère une suite (U_n) définie sur N par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \end{cases}$ et on pose V_n=$U_n - 3$.

1) a. Montrer que la suite (V_n)est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme V_0 et la raison.
   b. Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. Déduire la limites de V_n et de U_n.

2) On pose W_n=ln(V_n).

Démontrer que (W_n) est une suite arithmétique dont on déterminera le premier terme V_0 et la raison.

3) a. Exprimer W_n en fonction de n.

b. pour quelle valeur de n a-t-on : W_n = - ln(27^3) - ln(9) ?