4 année Mathématiques

Mathématiques
Devoir de contrôle n° 1

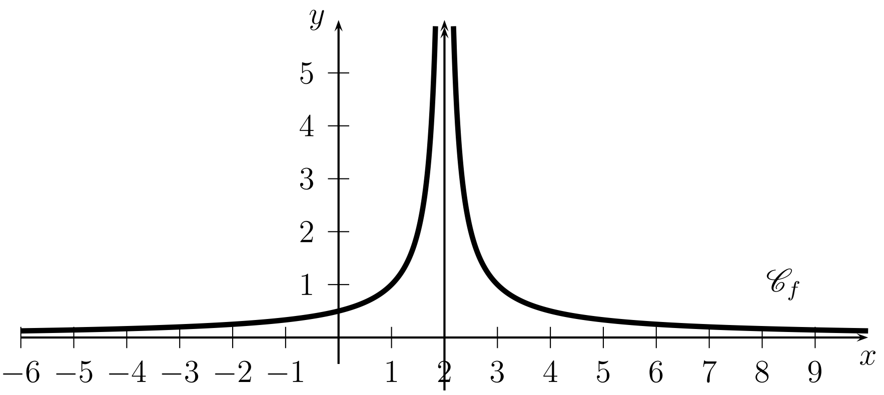
Durée 2 h

Exercice 1 — 2.5 points

Répondre par vrai ou faux sans justifier la réponse.

1. La seule isométrie fixant trois points distincts et l'idendité du plan.
2. Les symétries glissantes sont les seules isométries sans points fixes.
3. Si A un point n'appartenant pas à la droite Δ alors $S_A \circ S_\Delta$ est une symétrie orthogonale.
4. La composée de deux symétries orthogonales distictes est soit une translation soit une rotation.
5. La composée d'une translation et d'une rotation d'angle non nul est une rotation.

Exercice 2 — 2.5 points



Dans le graphique ci-dessus $(\mathscr{C}_f)$ désigne la courbe représentative d'une fonction f dans un repère orthonormé.

Les droites $x = 2$ et $y = 0$ sont des asymptotes à $(\mathscr{C}_f)$.

1. par une lecture graphique donner: $\lim\limits_{x \mapsto 2} f(x)$ et $f(]2, +\infty[)$.
2. Soit h la fonction définie par $h = g \circ f$ avec $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de h.
   (b) Montrer que h est prolongeable par continuité en 2.
   (c) Montrer que h strictement croissante sur $]2, +\infty[$.
   (d) Déterminer $h(]2, +\infty[)$.

Exercice 3 — 4 points

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$.

1. (a) Calculer $f(-1), f(-\frac{1}{2}), f(0)$ et $f(1)$.

   (b) Déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions distícts dans $\mathbb{R}$.

2. (a) Soit $\alpha \in [0, \pi]$, vérifier que $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$.

   (b) Déterminer en fonction de $\cos\alpha$ les trois solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exercice 4 — 3 points

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :$a_n = \frac{\sin n}{n^2}$ et $b_n = \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + \sin n}$

1. Monter que (a_n) converge vers 0.

2. Exprimer b_n à l'aide de a_n où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n$.

Exercice 5 — 8 points

Dans un plan muni d'un repère orthomormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on donne le cercle ζ de centre O et de diametre $[A_0B]$ avec A_0 et B deux points d'affixes respectives $\omega_0 = 1$ et $z_B = -1$.

Le but de l'exercice est de construire un pentagone regulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ de centre O.

On désigne par ω_k l'affixe du point A_k avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

1. (a) Justifier que pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\omega_k = (\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{5}})^k$.

   (b) Montrer que $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 = 0$.

   (c) Déduire que $4\cos^2(\frac{2\pi}{5}) + 2\cos(\frac{2\pi}{5}) - 1 = 0$. (On donne $2\cos^2(\frac{2\pi}{5}) - 1 = \cos(\frac{4\pi}{5})$).

2. Resoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$, puis déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

3. Dans la figure de la page annexe on donne le points I d'affixes $z_I = \frac{1}{2}i$. On désigne par ζ' le cercle de centre I et de rayon $\frac{1}{2}$ et par J le point d'intersection de ζ' et $[IB]$.

   (a) Montrer que $BA_2 = 2\cos(\frac{2\pi}{5})$.

   (b) Calculer BI puis déduire que $BJ = BA_2$.

4. Donner un procedé de construction du pentagone puis le construire.

Annexe

Nom.................................... Prenom....................................... N....