

**EXERCICE 1**

Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de leur ensemble de définition sur un ensemble à préciser, et écrire les fonctions réciproques :

$$f_1(x) = 3x - 5 \quad ; \quad f_2(x) = \sqrt{3} - x \quad ; \quad f_3(x) = x^2 - 1 \text{ sur } ]-\infty, 0] \quad ; \quad f_4(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \text{ sur } [-1, 1]$$

**EXERCICE 2**

Dans chacun des cas suivantes, montrer que  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ , et calculer sa dérivée au point indiqué entre parenthèse :

1. a-  $I = \mathbb{R}$      $f(x) = x^3 + 2x - 1$     ( $y = 2$ )

b-  $I = \mathbb{R}$      $f(x) = x^5 + 3x^3 + 2x - 1$     ( $y = 5$ )

justifier que les équations  $x^3 + 2x - 1 = 0$  et  $x^5 + 3x^3 + 2x - 1 = 0$  admettent une unique solution réelle

2- a-  $I = \mathbb{R}^*$      $f(x) = -2x + \frac{8}{x^3}$     ( $y = -3$ )

b-  $I = [-1, 1]$      $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$     ( $y = 1$ )

**EXERCICE 3**

Montrer que la fonction  $f: x \rightarrow \frac{x}{1+|x|}$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $] -1, 1[$  et donner l'expression de  $f^{-1}$

**EXERCICE 4**

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sin x}, & x \in ]-\pi, \pi[ \setminus \{0\} \\ 1, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1- montrer que pour tout  $x \in ]0, \pi[$  :  $\sin x - x \cos x \geq 0$

2- étudier les variations de  $f$ . déduire que  $f$  réalise une bijection de  $[0, \pi[$  vers  $[1, +\infty[$

3- on note par  $g$  la fonction réciproque de  $f$  sur  $[0, \pi[$ , vérifier que pour tout  $x \in [1, +\infty[$  on a  $x \sin(g(x)) = g(x)$

4- calculer  $g(1)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

5- calculer  $g'(x)$  en fonction de  $g(x)$

**EXERCICE 5**

Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-1, 1]$  par :  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1- montrer que  $f$  est continue et dérivable en 0

2- montrer que pour tout réel  $x$  de  $]-1, 1[$  ;  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1+\sqrt{1-x^2})}$

3- montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$

4- a- soit  $\lambda$  un réel de  $]-1, 1[$ . montrer que l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique  $x_0$  de  $]-1, 1[$

b- vérifier que  $f\left(\frac{2\lambda}{1+\lambda^2}\right) = \lambda$

c- en déduire l'expression de  $f^{-1}$  pour tout  $x$  de  $I$

5- tracer dans un même repère orthonormé les courbes  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$

### **EXERCICE 6** ( unité graphique 4cm)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,1[$  par  $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un plan rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1- **a-** étudier la dérivabilité de  $f$  à droite de  $0$  . interpréter graphiquement le résultat .  
**b-** dresser le tableau de variations de  $f$
- 2- **a-** montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera  
on désigne par  $\mathcal{C}'$  sa courbe représentative  
**b-** expliciter  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$
- 3- tracer  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$ .

### **EXERCICE 7**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0,1[$  par  $f(x) = \sqrt{\sin(\frac{\pi}{2}x)}$

- 1- étudier la dérivabilité de  $f$  en  $0$
- 2- dresser le tableau de variations de  $f$
- 3- **a-** montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $g$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on précisera  
on désigne par  $\mathcal{C}'$  sa courbe représentative  
**b-** étudier la continuité et le sens de variations de  $g$

4-**a-** montrer que  $g$  est dérivable sur  $[0,1[$  et que pour tout  $x \in [0,1[$   $g'(x) = \frac{4}{\pi} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

**b-** montrer que pour tout  $x \in [0,1[$   $g''(x) = \frac{4}{\pi} \frac{1+x^4}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}$

### **EXERCICE 8**

1°/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$  .

**a-** Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$ .

**b-** Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq x$  .

**c-** Montrer que la fonction  $u$  définie sur  $[0,1[$  par  $u(x) = x - \frac{x^2}{2}$  réalise une bijection de  $[0,1[$  sur  $[0, \frac{1}{2}]$  et expliciter  $u^{-1}(x)$  pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$  .

2°/ Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+$  par  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$  et  $\mathcal{C}_g$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

**a-** Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

**b-** Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}_+$  sur  $\mathbb{R}_+$  . On note  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$

**c-** Tracer dans le même repère les courbes  $\mathcal{C}_g$ ,  $\mathcal{C}_{g^{-1}}$ ,  $\mathcal{C}_u$  et  $\mathcal{C}_{u^{-1}}$  .

3°/ Soit  $(U_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $U_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  et  $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$ ,  $n \geq 0$  .

**a-** Montrer que  $(U_n)$  est croissante.

**b-** Montrer que  $(U_n)$  est non majorée.

**c-** En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$  .

4°/ **a-** En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout  $x \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $x \leq g^{-1}(x) \leq 1 - \sqrt{1-2x}$  .

**b-** En déduire la limite de la suite  $(V_n)$  définie par  $V_n = ng^{-1}(\frac{1}{n})$  .

### EXERCICE 9

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \frac{1}{2 \cos x}$

1- montrer que  $f$  est une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur un intervalle  $I$  que l'on déterminera

2- on considère la fonction  $g$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $g(x) = \sin x - 2 \cos^2 x$

a-étudier les variations de  $g$

b-montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ . vérifier que  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{3}$

c-en déduire le signe de  $g(x)$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3-Soit la fonction  $h$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $h(x) = f(x) - x$

a-étudier les variations de  $h$

b-prouver que  $h(\alpha) < 0$

c-en déduire que l'équation  $g(x) = 0$  admet exactement deux solutions  $r$  et  $r'$  tels-que

$$\frac{\pi}{6} < r < \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{3} < r' < \frac{5\pi}{12}$$

d-interpréter graphiquement les résultats

e-tracer  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_{f^{-1}}$  dans un même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

### EXERCICE 10

On considère la fonction  $g$  définie sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$

1- justifier la dérivabilité de  $g$  sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  et montrer que  $g'(x) = \frac{1}{1 - \sin x}$

2- déduire que  $g$  est une bijection de  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera

3- montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $J$ , et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$

4- pour  $x \in J$ , on pose  $\varphi(x) = g^{-1}(x) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$

a- montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $J$  et calculer  $\varphi'(x)$

b- en déduire que pour  $x \in J$ ,  $g^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = -g^{-1}(x)$

### EXERCICE 11

Soit  $n$  un entier naturel non nul et soit  $f_n$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = x^3 + 3x + 1$

1- a- dresser le tableau de variations de  $f_n$

b-montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . on pose  $h$  sa réciproque

c- étudier la continuité et le sens de variations de  $h$

d- montrer que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha_n \in ]-1, 0[$

2- a- montrer que pour tout réel  $x$  de  $] -1, 0[$  et pour  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$

b- montrer que la suite  $(\alpha_n)$  est croissante et qu'elle est convergente

c- montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  :  $\alpha_n = \frac{-1}{\alpha_n^2 + 3n}$

d- en déduire que  $\frac{-1}{3n} < \alpha_n < \frac{-1}{3n+1}$ . calculer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$

3- tracer  $\mathcal{C}_{f_1}$  et  $\mathcal{C}_{f_1^{-1}}$  ;  $\mathcal{C}_{f_2}$  et  $\mathcal{C}_{f_2^{-1}}$

## EXERCICE 12

- 1- Vérifier que chacune des fonctions suivantes est une bijection d'un intervalle  $I$  sur un intervalle  $J$  à déterminer
- 2- Tracer dans le même repère la fonction réciproque de chaque fonction en précisant le domaine de dérivabilité de chaque fonction réciproque

