$4^{ème}$ Info	Série Nombres complexes 1	Proposer par / Mantadher Ben Marzouk

Le style simple est semblable à la clarté blanche. Il est complexe, mais il n'y paraît pas [Anatole France]

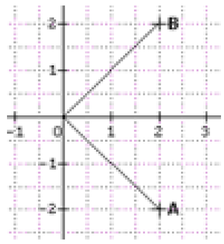
Exercice N°1

Choisir la bonne réponse :

1) Les racines carrées de nombre complexe Z = $-9-12i$ est

a. $(\sqrt{3}+2i\sqrt{3})$ et $(\sqrt{3}-2i\sqrt{3})$ b. $(-\sqrt{3}+2i\sqrt{3})$et $(\sqrt{3}-2i\sqrt{3})$ c. $(\sqrt{3}+2i\sqrt{3})$

2) Les affixes des points A et B est :



a. Z_A= - 2i , Z_B = -2+ i b. Z_A= - 2i , Z_B = 2+ 2i c. Z_A= - 2i+2 , Z_B = 2+2 i

3) On considère les points A(i), B(-4-2i) et C(-2-3i) le triangle ABC est :

a. rectangle. b. isocèle et rectangle c. équilatérale

Exercice N°2

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A, B, C et I d'affixes respectives Z_A= - 2i , Z_B = 1+ i , Z_C = 4+2 i et Z_I = .2

1) Placer sur une figure les points A, B, C et I.

2) Montrer que I est le milieu du segment [AC] .

3) Montrer que le triangle ABC est isocèle de sommet principal B.

4) Soit D le symétrique de B par rapport à I.

a) Déterminer Z_D .

b) Montrer que le quadrilatère ABCD est un losange.

Exercice 3

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm.

On note $Z_1= -1-i\sqrt{3}$ et $Z_2=i\,Z_1$

1) Montrer que $Z_1= -i+\sqrt{3}$

2) a)Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C telles que :

$Z_A = -2+2i\sqrt{3}$, $Z_B = 2-2i\sqrt{3}$ et $Z_C = 8$

b) Montrer que $Z_A = 2\bar{Z}_1$ et $Z_B = -Z_A$

3) a) Placer les points A, B et C dans le plan P.

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.

c) Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère ABCD soit un rectangle.

Exercice 4

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ d'unité graphique 2cm, on désigne par les points A, B,C et I d'affixes respectives. 2i , – 4i , 3 – i et – i.

1) a) Placer les points A,B et C .

b) Montrer ABC est un triangle isocèle et rectangle.

c) Déterminer l'affixe du point D pour que ACBD soit un carré.

2) A tout point M du plan distinct de B et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe u définie par $u = \dfrac{z-2i}{iz-4}$

a) Calculer u sachant que z = 2 – 3i.

b) Calculer z sachant que u = 2 – 3i.

3) a) Vérifier que pour tout $z \neq -4i$; $u = \dfrac{i(z-2i)}{-z-4i}$.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que $|u|= 1$.

4) a) Montrer que $|u+i||z+4i|= 6$.

b) En déduire que si M appartient a un cercle C de centre B et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle C' qu'on déterminera le centre et le rayon .

Exercice N°5 -B 06-

1) a) Vérifier que $(2-\sqrt{3}i)^2=1-4i\sqrt{3}$

b) Résoudre dans C : $Z^2-2Z+4i\sqrt{3}=0$

2) Soit (E) : $Z^3-3Z^2+2(1+2i\sqrt{3})Z-4i\sqrt{3}=0$

a) Vérifier que 1 est une solution de (E).

b) Vérifier que on a : $Z^3-3Z^2+2(1+2i\sqrt{3})Z-4i\sqrt{3}=(Z-1)(Z^2-2Z+4i\sqrt{3})$.

c) Résoudre dans C l'équation (E)

d) Placer dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A,B et C affixes des solution de l'équation (E).

Exercice N°6

Pour tout nombre complexe z, on définit :

$P(z) = Z^3 + 2(\sqrt{2}-1)Z^2 + 4(1-\sqrt{2})Z - 8$.

1) Vérifier que P(2) = 0. En déduire une factorisation de P(z).

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation P(Z) = 0. On appelle Z_1 et Z_2 les solutions autres que 2.

Vérifier que $Z_1 + Z_2 = -2\sqrt{2}$ et $Z_1 \times Z_2 = 4$

3) a)Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, placer les points A, B et C d'affixes respectives 2, $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}-i\sqrt{2}$, et I le milieu de [AB].

b) Démontrer que le triangle OAB est isocèle. En déduire une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{OI})$,

c) Calculer l'affixe Z_I de I, puis le module de Z_I.

Exercice N°7

1) Calculer: $(-2+4i)^2+4(4i+4)$

2) Résoudre l'équation: $Z^2+(-2+4i)Z-4i-4=0$.

3) Soit l'équation (E): $Z^3+4Z^2(-1+i)-12iZ+8+8i=0$

a) Vérifier que $Z_0 = 2$ est une solution de (E)

b) Montrer que: $z^3+4z^2(-1+i)-12iz+8+8i=(z-2)(z^2+(-2+4)z-4i-4)$

c) Déduire les solutions de (E)

4) Le plan est rapporté à un repère orthonormée direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, On note A,B et C les points d'affixes respectives 2 , -2i ,2-2i

a) calculer les distances AB ; AC ; BC

b) quelle est la nature du triangle ABC .

Exercice N°8

1) a) Résoudre dans C :(E) :$Z^2-Z+1=0$

b)En déduire les solutions de (E') :$Z^4-Z^2+1=0$

2) Mettre le polynôme P(z)= sous la forme d'un produit de deux polynômes du second dégré à coefficients réels.

3) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équations (E') telles que

$Ré(Z_A)>0$, $Im(Z_A)>0$; $Ré(Z_B)>0$ et $Im(Z_D)>0$

a) Placer les points A, B, C, et D

b) Déterminer la nature du quadrilatère ABCD

Exercice N°9

1) Résoudre dans C :$Z^2-(3+4i)Z-8+6i=0$

2) Soit (E) :$Z^3-(1+4i)Z^2-(14+2i)Z-16+12i=0$

a) Vérifier que (-2) est une solution de (E)

b) Déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$Z^3-(1+4i)Z^2-(14+2i)Z-16+12i=(Z+2)(z^2+bZ+c)$

c) Résoudre alors (E).

3) Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $Z_A = -1+2i$ et $Z_B = 4+2i$

a) Montrer que le triangle OAB est rectangle.

b) Soit C le cercle circonscrit au triangle OAB et D le point d'affixes 4-3i. Montrer que la droite (OD) est tangente à C.

Exercice N°10

1) Résoudre dans C : $Z^2+(6+5i)Z+2+16i=0$

2) Soit $f(z)=Z^3+2(3+2i)Z^2+(7+10i)Z+16-2i$

a) Déterminer le nombre complexe a tel que , pour tout nombre complexe z on a:

$f(z)= (Z-a)(Z^2+(6+5i)Z+2+16i)$

b) Résoudre alors l'équation f(Z)=0.

3) Dans le plan P complexe rapporté un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$;on considère les points A(i), B(-4-2i) et C(-2-3i) et on désigne par Z_I l'affixe du point I milieu de [AC].

a) Représenter les points A, B, C et I

b) Montrer que le triangle ABC est rectangle.

4) a) Construire les points D et E tels que BAD et BEC soient des triangles directs rectangles et isocèles en B.

b) en déduire les affixes respective Z_D et Z_E s des points D et E .

Exercice N°11

Soit l'équation (E): $Z^3-4iZ^2-6Z+4i=0$

1)a) Montrer que 2i est une solution de (E).

b) Résoudre dans C , l'équation (E) . On donnera les solutions sous forme trigonométrique.

2) Soit dans le plan complexe muni du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, les points A, B et C d'affixes respectives -1+i , 1+i et 2i

a) Calculer OA , OB ; Que peut-on déduire?

b) Montrer que OACB est un carré dont on précisera l'affixe de son centre I

3) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z| = |z+1-i|$

Exercice N°12

Partie A

Soit $Z\neq 2i$ .Le plan complexe P est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$

On désigne par A(2i) .A tout point M(z) du plan, distinct de A on associe le point M' d'affixe z' définie par : $Z' = \frac{Z+2i}{Z-2i}$.

1) Calculer l'affixe du point N'associé à $N(i + \sqrt{3})$.
2) Calculer l'affixe du point Q sachant que le point Q' associé à Q à pour affixe 1 + i.
3) Déterminer et représenter les ensembles suivants :
4) E= { M(Z) tel que Z' est réel} et F= {M(Z) tel que |Z'| = 1}.

Partie B

On considère dans C l'équation (E) : $z^3 + (1 - 2i)z^2 - (1 + 6i)z - 5 = 0$.

1) a) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on précisera.

b) Résoudre dans C, l'équation (E).

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u},\vec{v})$; on donne les points A, B et C d'affixes respectives : i, -2-i et 1 + 2i Montrer que A, B et C sont alignés.

3) Soit $f : P\backslash \{A\} \longrightarrow P$

$M(Z) \longrightarrow M'(Z')$ tel que $Z' = \frac{-Z+5i}{Z-i}$.

a) Vérifier que $Z' + 1 = \frac{4i}{Z-i}$

Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle de centre A et de rayon 4