EXERCICE I Soit f définie par $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$

1°) Montrer que f définit une bijection de l'intervalle $]1, +\infty[$ sur un intervalle à préciser. Soit alors g la bijection réciproque de $f|_{]1,\,+\infty[}$. Etudier g : ensemble de définition, continuité, sens de variation, dérivabilité. Calculer f(2). En déduire g' (2/3).

2°) Expliciter g(y).

EXERCICE II

Soit f définie pour x appartenant à $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$.

1°) Montrer que f est une bijection de $[0, 1]$ sur un intervalle que l'on précisera. Etudier la bijection réciproque f^{-1}: ensemble de définition, continuité, sens de variation.

2°) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur son ensemble de définition.

Calculer $(f^{-1})'(0)$.Représenter graphiquement C(f) et C(f^{-1}) dans un même repère orthonormé. Préciser les pentes des tangentes aux points d'abscisses 0 et 1.

EXERCICE III

On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[0;a]$

par : Pour tout $x \in [0;a]$, $f_a(x) = \dfrac{a-x}{a(a+x)}$.

(a) Justifier la dérivabilité de f_a sur $[0 ; a]$ et calculer sa dérivée. En déduire le tableau des variations de f_a en précisant les valeurs aux bornes.

(b) Montrer que f_a réalise une bijection de $[0;a]$ sur $[0;\frac{1}{a}]$. On note f_a^{-1} sa bijection réciproque. Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.

(c) Montrer que $f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}$.

EXERCICE IV

Etudier les branches infinies de C_f avec :

1°) $f(x) = x + \sqrt{x}$.

2°) $f(x) = x + \sqrt{x}.\sin(x)$.

EXERCICE V

1°/ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que pour tout $x \geq 0$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} \leq x$.

c) Montrer que la fonction u définie sur $[0,1]$ par $u(x) = x - \dfrac{x^2}{2}$ réalise une bijection de $[0,1]$ sur $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$ et expliciter $u^{-1}(x)$ pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

2°/ Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ et C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Interpréter graphiquement la double inégalité démontrée en 1°/b).

b) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On note g^{-1} la fonction réciproque de g.

c) Tracer dans le même repère les courbes C_g, $C_{g^{-1}}$, C_u et $C_{u^{-1}}$.

3°/ Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $U_{n+1} = g^{-1}(U_n)$, $n \geq 0$.

a) Montrer que (U_n) est croissante.

b) Montrer que (U_n) est non majorée.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4°/a) En utilisant la question 2°/c), justifier que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$

, $x \leq g^{-1}(x) \leq 1-\sqrt{1-2x}$.

b) En déduire la limite de la suite (V_n) définie par $V_n = ng^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.