

CALCUL INTEGRAL

1) Introduction: Le plan est muni d'un repère (O, \vec{i}, \vec{j})

f est une fonction continue croissante et positive sur $[a; b]$

L'unité d'aire est définie par le parallélogramme

formé par le repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Pour tout réel x de $[a; b]$,

on considère l'aire (notée $A(x)$) de la partie hachurée

1)a) Illustrer sur la figure le nombre $A(x+h)-A(x)$, pour h réel strictement positif (tel que $x+h < b$)

b) Expliquer graphiquement pourquoi: $h \cdot f(x) \leq A(x+h)-A(x) \leq h \cdot f(x+h)$

c)i) Dédire de ce qui précède que: $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$

ii) On montrerait de même que: $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$

d) Conclusion: La fonction: $x \mapsto A(x)$, est dérivable en tout point x de $[a; b]$ et $A'(x) =$
est la primitive de f sur $[a; b]$, qui

2) Remarques: a) L'ensemble D des points $M(x; y)$ du plan tels que: $a \leq x \leq b$ et $0 \leq y \leq f(x)$
est le « domaine plan » limité par: l'axe (Ox) , le graphe de f ,
et les droites d'équations:

$$A(a) = \quad ; A(b) =$$

b) Soit F une autre primitive de f sur $[a; b]$

Ecrire $A(x)$ en fonction de $F(x)$

En remarquant que l'aire de D est égale à: $A(b) - A(a)$, en déduire que:

l'aire de D est égale à: $F(b) - F(a)$

On retiendra: f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$

F est une primitive de f sur $[a; b]$

L'aire (en u.a.) du domaine plan limité par

l'axe (Ox) , le graphe de f , et les droites d'équations: $x = a$ et $x = b$ est

3) Exemples: 1) Déterminer l'aire du domaine $D = \{M(x; y) / 0 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq x^2\}$

2) Déterminer l'aire du domaine $D = \{M(x; y) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \cos x\}$

4) On admet: i) Ce qui vient d'être montré pour une fonction continue croissante et positive sur $[a; b]$
est également valable pour toute fonction continue et positive sur $[a; b]$
donc que toute fonction continue et positive sur $[a; b]$ admet une primitive sur $[a; b]$

ii) Toute fonction continue sur $[a; b]$ admet une primitive sur $[a; b]$

II) Intégrale d'une fonction continue sur un segment:

1) Définition: f est une fonction continue sur $[a; b]$, soit F une primitive de f sur $[a; b]$
Le nombre $F(b) - F(a)$ (noté: $[F(t)]_a^b$), est indépendant de la primitive F choisie,
on le note: $\int_a^b f(t)dt$ (ou $\int_a^b f(u)du$ etc.) ; on l'appelle l'intégrale de f sur $[a; b]$

On retiendra: f est une fonction continue sur $[a; b]$; F est une primitive de f sur $[a; b]$
L'intégrale de f sur $[a; b]$: $\int_a^b f(t)dt = [F(t)]_a^b$

2) Remarques: a) f est une fonction continue sur $[a; b]$

La fonction: $x \mapsto \int_a^x f(t)dt =$ $\quad =$ \quad définie sur $[a; b]$

est la primitive de f sur $[a; b]$, qui s'annule pour $x = a$

b)i) Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t)dt$ est

ii) Si f est négative sur $[a; b]$

Alors $-f$ est \quad sur $[a; b]$

Alors l'aire du domaine plan limité par l'axe (Ox), le graphe de f , et les droites

$$\begin{aligned} \text{d'équations: } x = a \text{ et } x = b \text{ est: } \int_a^b \quad &= \\ &= \\ &= \\ &= -\int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

3) Exercices: 1) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x; y) / 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } 0 \leq y \leq \cos x \right\}$

2) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x; y) / 1 \leq x \leq 2 \text{ et } 0 \leq y \leq \frac{1}{x^2} \right\}$

3) Déterminer l'aire du domaine $D = \left\{ M(x; y) / 0 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 - 1 \leq y \leq 0 \right\}$

4) Propriétés de l'intégrale:

a) Relation de Chasles:

f est une fonction continue sur $[a; b]$; F est une primitive de f sur $[a; b]$; $c \in [a; b]$

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \quad + \quad = \quad = \int_a^b f(t)dt$$

Remarque: On pose: $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$ ainsi on retrouve: $\int_a^b f(t)dt + \int_b^a f(t)dt = \quad =$

b)i) f et g sont des fonctions continues sur $[a; b]$; F et G sont des primitives de f et g sur $[a; b]$

$$\int_a^b (f+g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$$

ii) k est un réel

$$\int_a^b k.f(t)dt = k \int_a^b f(t)dt$$

iii) Aire du domaine plan compris entre deux graphes :

f et g sont des fonctions continues sur $[a; b]$, telles que $f \geq g$ sur $[a; b]$

Il existe un réel β tel que: $f+\beta$ et $g+\beta$ sont deux fonctions positives sur $[a; b]$

L'aire du domaine plan compris entre deux graphes est:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f(t) + \beta)dt - \int_a^b (g(t) + \beta)dt &= \\ &= \int_a^b (f(t) - g(t))dt \end{aligned}$$

c)i) f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$ $\int_a^b f(t)dt \geq 0$

ii) f et g sont des fonctions continues sur $[a; b]$, telles que $f \geq g$ sur $[a; b]$

f - g est une fonction continue et positive sur $[a; b]$ donc:

donc:

$$\text{donc: } \int_a^b f(t)dt \geq \int_a^b g(t)dt$$

On retiendra:

f et g sont des fonctions continues sur $[a; b]$; k est un réel

$$c \in [a; b] \quad \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt =$$

$$\int_a^b f(t)dt$$

$$\int_a^b (f+g)(t)dt =$$

$$\int_a^b k.f(t)dt =$$

Si f positive sur $[a; b]$ Alors

Si $f \geq g$ sur $[a; b]$ Alors

5) Exercices: 1) Déterminer l'aire du domaine D, défini par:

$$D = \{M(x, y) / -1 \leq x \leq 1 \text{ et } x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$$

2)a) Montrer que pour tout réel x : $1-x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

b) Représenter graphiquement les fonctions: $x \mapsto 1$; $x \mapsto 1-x^2$; $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, sur $[-1; 1]$

c) Déterminer un encadrement de $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

d) Montrer que pour tout réel x : $1-x^2 \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1-x^2+x^4$

e) Dédurre de d) un nouvel encadrement de $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$

f) Calculer la valeur exacte de $\int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$, en déduire un encadrement de π

III) Intégration par parties:

u et v sont deux fonctions dérivables sur $[a; b]$

1)a) Principe général :

$$(u.v)' =$$

$$\text{donc: } \int_a^b (u.v)'(t) dt = \int_a^b (u' \cdot v)(t) dt + \int_a^b (u.v')(t) dt$$

$$\text{donc: } \int_a^b (u' \cdot v)(t) dt = [(u.v)(t)]_a^b - \int_a^b (u.v')(t) dt$$

On retiendra:

$$\int_a^b u' \cdot v = [u.v]_a^b - \int_a^b u.v'$$

b) Remarque: Pour calculer: $\int_a^b (u' \cdot v)(t) dt$, on peut aussi déterminer une primitive de $u' \cdot v$ par parties, puis poursuivre le calcul de l'intégrale

2) Exercice: En intégrant par parties, calculer les intégrales:

i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

ii) $\int_0^{\pi} (x^2 - 1) \sin x dx$

iii) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

iv) $\int_0^1 (x+3) \sqrt{2x+1} dx$

v) $\int_{-1}^1 \frac{x}{(x-2)^3} dx$

vi) $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(2x+3)^4} dx$