➢ **YOUSSEFBOULILA COURS 4M**

LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

LA FONCTION LOGARITHME de BASE 10

I) Définition de la fonction logarithme népérien:

1) Introduction: La fonction: $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur l'intervalle $]0;+\infty[$

donc toutes les fonctions: $x \mapsto \int_a^x \frac{1}{t}\,dt$ $(a > 0)$ sont des primitives

de la fonction: $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

2) Définition: On appelle fonction logarithme népérien, la fonction notée: $\ln(x)$

qui est la primitive de la fonction: $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, qui s'annule pour $x = 1$

Remarques: **i)** Par définition: $D_{\ln}$, le domaine de définition de la fonction logarithme népérien est:

ii) Pour tout réel x , strictement positif, $\ln x = \int^x \frac{1}{t}\,dt$

3) Interprétation graphique:

a) Construire le graphe de la fonction: $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$

b) k est un réel supérieur à 1 , construire la droite d'équation $x = k$ et $x = 1$
Interpréter graphiquement le réel $\ln k$

c)i) En utilisant une calculatrice, vérifier que: $\ln 1 =$ et $\ln 3 > 1$
ii) Intuitivement, on déduit de ce qui précède, qu'il existe une unique valeur de k $(k > 1$ et $k < 3)$,
pour laquelle: $A(k) = \ln k = 1$
En utilisant une calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-3} de cette valeur particulière de k , que l'on note: e , donc: $\quad < e <$

d) k est un réel strictement positif et inférieur à 1 , construire la droite d'équation $x = k$
Interpréter graphiquement le réel $\ln k$

4) Exercice: Calculer les intégrales: i) $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - 1\right)dx$ ii) $\int_2^3 \left(1 - \frac{1}{2x}\right)dx$

II) Etude de la fonction logarithme népérien :

1) Dresser le tableau de variation de la fonction logarithme népérien :

x	
$\ln' x =$	

lnx

2) Propriété algébrique fondamentale:

a) a est un réel strictement positif fixé. On considère la fonction: $g(x) = \ln(a.x)$

$D_g =$; g est dérivable sur: et $g'(x) =$

Donc g et ln sont deux de la fonction: $x \mapsto$ sur

Donc

En particulier pour $x = 1$ on a

Donc pour tous réels strictement positifs a et b : $\ln(a.b) =$

« Vérifier » avec une calculatrice que: $\ln(3 \times 7) =$

b) Conséquences: Pour tous réels strictement positifs a et b

i) $\ln(b.\frac{1}{b}) = \ln$ $\Leftrightarrow$ $\ln b + \ln\frac{1}{b} =$ $\Leftrightarrow$ $\ln\frac{1}{b} =$

*) « Vérifier » avec une calculatrice que: $\ln(0,5) =$

*) Application: $\ln\frac{1}{e} =$

ii) $\ln\frac{a}{b} = \ln(a.\quad) =$ $=$

« Vérifier » avec une calculatrice que: $\ln(\frac{2}{3}) =$

iii) $\ln(a^0) =$ $= 0.\ln a$

$\ln(a^1) =$ $= 1.\ln a$

$\ln(a^2) =$ $= 2.\ln a$

$\ln(a^3) =$ $= 3.\ln a$

etc...

Pour tout nombre entier naturel n ; $\ln(a^n) = \ln(\qquad) =$

$= n.\ln a$

iv) Pour tout nombre entier naturel n ; $\ln(a^{-n}) = \ln\left(\frac{1}{}\right) =$ $=$

v) Pour tout nombre entier naturel q non nul, on définit la racine $q^{\text{ième}}$ de a par:

$\sqrt[q]{a}$ (ou $a^{\frac{1}{q}}$) est l'unique réel positif, qui élevé à la puissance q donne

$\ln\left[\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q\right] = \ln a$ $\Leftrightarrow$ D'ou: $\ln a^{\frac{1}{q}} =$

vi) Pour tout nombre rationnel $r = \frac{p}{q}$ $(p ; q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N^*}$, on définit a à la puissance $\frac{p}{q}$, par: $a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$

$\ln a^{\frac{p}{q}} =$ $\quad=\quad$ $=$

On retiendra: Pour tous réels strictement positifs a et b $\ln(a.b) =$

$\ln\frac{1}{b} =$

$\ln\frac{a}{b} =$

Pour tout nombre rationnel r $\ln(a^r) =$

On dit que la fonction logarithme népérien « transforme les produits en
et les quotients en »

3) Exercices: 1) Déterminer D_f le domaine de définition et les zéros des fonctions:

i) $f(x) = \ln(2x+3)$ ii) $f(x) = 1-\ln(-x+1)$ iii) $f(x) = 1+\ln(x^2-1)$

iv) $f(x) = \ln(3-x) + \ln 2 - \ln(2x+1)$

2) Déterminer le domaine d'étude, puis résoudre les inéquations:

i) $\ln(1-x^2) \geq 0$ ii) $1-\ln(-x+1) \geq 0$ iii) $1+\ln(1-x^2) \geq 0$

iv) $\ln(x-1) + \ln 3 \geq -\ln(x+1)$

3) Un capital C est déposée sur un compte à intérêts composés, au taux annuel de t%

Le capital disponible au bout de n années est: $C_n =$

a) Combien d'année faut-il attendre pour voir son capital doubler (resp. tripler) si t = 5 ?

b) Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de la valeur de t pour laquelle le capital double en 10 ans

4) Résoudre dans **N** : $0{,}98^n \leq 0{,}75$

4) Etude des limites aux bornes du domaine de définition :

a) Lorsque x tend vers + : Montrons que : $\lim_{x\to+\infty} \ln x =$

Il faut prouver que: $\forall A \in$ $\quad\exists\ x_0 \in$ $\quad/\ \forall x$ $\quad\ln x$

Montrons que: $\forall A \in$ $\quad\exists\ n_0 \in$ $\quad/ \ln(2^{n_0}) > A$

$\ln(2^{n_0}) > A \Leftrightarrow$ $\quad\Leftrightarrow$

Donc il est toujours possible de trouver n_0 , de plus la fonction ln est croissante sur

donc: $\forall x > 2^{n_0}$ $\quad\ln x > \ln(2^{n_0}) > A$

donc: $\forall A \in$ $\quad\exists\ x_0 \in$ $\quad(x_0 =$ $\quad) /\ \forall x$ $\quad\ln x$

Conclusion: $\lim_{x\to+\infty} \ln x =$

b) Lorsque x tend vers 0^+ : Montrons que: $\lim_{x\to 0^+} \ln x =$

Pour tout réel x strictement positif, écrire lnx en fonction de $\ln\frac{1}{x}$: $\ln x =$

Lorsque x tend vers 0^+ ; $\frac{1}{x}$ tend vers ; $\ln\frac{1}{x}$ tend vers donc lnx tend vers

Remarque: Le graphe de la fonction ln admet pour asymptote la droite

5) Graphe de la fonction logarithme népérien: Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Déterminer les équations des tangentes au graphe de la fonction logarithme népérien, aux points d'abscisses: 1 et e , puis construire ces tangentes (on remarquera que la tangente au point d'abscisse e passe par l'origine du repère)

b) Etudier la concavité de la fonction logarithme népérien :

c) Construire le graphe de la fonction logarithme népérien

On retiendra: Le tableau de variation de la fonction ln

x	1	e
ln'(x) =		
lnx		

Le graphe de la fonction ln

6) Exercice: On veut étudier la position relative des graphes des fonctions: $f(x) = \sqrt{x}$ et lnx

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction $g(x) = \sqrt{x} - \ln x$

b) Déterminer le domaine de dérivabilité de g et déterminer g'(x)

c) Dresser le tableau de variation de g (on admet provisoirement que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) =$)

d) Conclure

7) Autres limites à connaître:

a) Déduire du **6)** que pour tout réel $x \geq 1$ $0 \leq \frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} =$ Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}$

b) Pour tout réel x strictement positif, $-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} =$

Lorsque x tend vers 0^+ , $\frac{1}{x}$ tend vers ; $-\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ tend vers donc $\lim\limits_{x\to0^+} x.\ln x =$

c) La fonction ln est dérivable en 1 et le nombre dérivé de ln en 1 est

donc $\lim\limits_{h\to0}\frac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} =$ donc $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x} =$

On retiendra: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} =$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x.\ln x =$; $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} =$

d) Remarques: **i)** Pour tout entier naturel q non nul, la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $x \mapsto x^{\frac{1}{q}}$ est la bijection réciproque de la fonction définie de vers par:

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{q}} =$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{q}} =$

ii) Pour tout rationnel strictement positif $r = \frac{p}{q}$ $(p\,;q) \in \mathbf{N^*}\times\mathbf{N^*}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r =$

lorsque x tend vers + , $\frac{\ln x}{x^r}$ présente une forme indéterminée du type

Pour tout réel x strictement positif, écrire $\frac{\ln x}{x^r}$, en fonction de $\frac{\ln x^r}{x^r}$

En déduire: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^r} =$

«on dit que lorsque x tend vers + , la puissance l'emporte sur le logarithme népérien»

iii) Pour tout rationnel strictement positif $r = \frac{p}{q}$ $(p\,;q) \in \mathbf{N^*}\times\mathbf{N^*}$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r =$

lorsque x tend vers 0^+ , $x^r\ln x$ présente une forme indéterminée du type

Pour tout réel x strictement positif, écrire $x^r\ln x$ en fonction de $x^r\ln x^r$

En déduire: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^r\ln x =$

«on dit que lorsque x tend vers 0^+ , la puissance l'emporte sur le logarithme népérien»

On retiendra: Lorsqu'il y a une forme indéterminée en ou en
« la puissance l'emporte sur le logarithme népérien »

e) Exercices: 1) Etudier les limites: $\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x - x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x-1)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - \ln(x+2))$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (x - x.\ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (2x + 3 - 2.\ln(2x - 5))$; $\lim\limits_{x\to+\infty} ((x + 2)^2 - \ln x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+1}{x+3} \times \frac{\sqrt{x}}{\ln x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x-1}{x^2-3} \times \frac{\sqrt{x}}{\ln x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{x+1}{x^2+3} \times \frac{x}{\ln x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (\frac{2x+1}{x^2-3} \times \frac{x^2}{\ln x})$

2) Etudier les limites: $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} - \frac{1}{x.\ln x})$; $\lim\limits_{x\to 0^+} (\frac{1}{x} + \frac{1}{x.\ln x})$; $\lim\limits_{x\to 1^+} (x.\ln(x-1) - \ln(x-1))$

III) Dérivées et primitives:

1) Dérivée des fonctions du type: f(x) = ln(u(x)):

a) Si u(x) dérivable et strictement positive sur I et $u(I) \subset]0;+\infty[$
Alors la composée des fonctions ln et u : lnou est dérivable sur I et (lnou(x))' =

b) Exercices: 1) Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions:
i) $f(x) = \ln(2x-5)$ ii) $f(x) = \ln(-3x+1)$ iii) $f(x) = \ln(x^2+2x)$ iv) $f(x) = \ln(\sqrt{x} + 1)$

v) $f(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ vi) $f(x)=\frac{1}{\ln(5-x)}$ vii) $f(x)=\ln\left(\frac{2x-3}{x^2-3x+2}\right)$ viii) $f(x)=\ln(\ln x)$

2) En utilisant le théorème de l'Hôpital, étudier les limites:

i) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln x}{x-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2x-1)}{2x-2}$ iii) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1-x)}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{\ln(-3x-5)}{x+2}$ v) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\ln(2\sqrt{x}-1)}{2x-2}$

c) Complément: $f(x)=\ln(|u(x)|)$

i) Si $u(x)$ est strictement positive sur l'intervalle I Alors $f(x)=$ Alors $f'(x)=$

ii) Si $u(x)$ est strictement négative sur l'intervalle I Alors $f(x)=$ Alors $f'(x)=$

d) Exercice: Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et la dérivée des fonctions:
$f(x)=\ln|\sin x|$; $f(x)=\ln|\sqrt{x}-1|$

2) Primitives des fonctions du type: $f(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$:

a) Si $u(x)$ est non nulle et dérivable sur I , d'après le **III)1)c)** les primitives de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ sur I , sont:

b) Exercices: Déterminer les primitives des fonctions: (on précisera sur quel intervalle)
$f(x)=\frac{1}{x-2}$; $f(x)=\frac{1}{2x+1}$; $f(x)=\frac{3}{-x+1}$; $f(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$; $f(x)=\frac{x-1}{x^2-2x}$

On retiendra: $[\ln(u(x))]'=$ (en particulier: $[\ln(ax+b)]'=$)
$[\ln|u(x)|]'$
$\text{Prim}\frac{u'(x)}{u(x)}=$ (en particulier: $\text{Prim}\frac{a}{ax+b}=$)

3) Exercice: 1) Dresser le tableau de variation de f , on donnera les limites de f aux bornes de D_f

2) Construire le graphe de f

i) $f(x)=\ln(2x-3)$ ii) $f(x)=\ln(-2x+5)$ iii) $f(x)=x+1-\ln(x+1)$

4) Exercice: Calculer les intégrales:

i) $\int_0^{e-1}\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$ ii) $\int_0^1\left(x-\frac{1}{2x+1}\right)dx$ iii) $\int_2^{e+1}\frac{1}{-x+1}dx$ iv) $\int_{-2}^0\left(x-1+\frac{x}{2x^2+1}\right)dx$

5) Exercice: 1) Déterminer F , la primitive de $f(x)=2x^2-\frac{3}{4x}+4$, si $F(1)=3$ sur $]0;+\infty[$

2) Déterminer F , la primitive de $f(x)=-x+2-\frac{2x^2}{x^3-1}$, si $F(0)=1$ sur $]-\infty;1[$

6) Exercices: 1)a) Ecrire $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$ sous la forme: $a+\dfrac{b}{x+2}$ b) Calculer: $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{x+3}{x+2}\,dx$

2)a) Ecrire $f(x) = \dfrac{4x-11}{2x-4}$ sous la forme: $a+\dfrac{b}{2x-4}$ b) Calculer: $\displaystyle\int_{2+\frac{1}{2e}}^{2+\frac{e}{2}} \frac{4x-11}{2x-4}\,dx$

3) Calculer: $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1-7x}{-4+3x}\,dx$

7) Exercices: 1) Déterminer les réels a ; b ; k ; c et d tels que $f(x) = ax+b+\dfrac{k}{cx+d}$

i) $f(x) = \dfrac{2x^2-x+3}{2x-1}$ ii) $f(x) = \dfrac{6x^2-x-3}{3x+1}$

2) Calculer les intégrales: i) $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{2x^2-x+3}{2x-1}\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{6x^2-x-3}{3x+1}\,dx$

3) Calculer: $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{x^2+x}{2x-1}\,dx$

8) Exercice: 1) Construire le graphe de la fonction $f(x) = \dfrac{6x^2-x-3}{3x+1}$

2)a) k est un réel positif

Exprimer en fonction de k , A(k) , l'aire du domaine délimité par: le graphe de f , l'asymptote oblique et les droites d'équation: $x = 0$ et $x = k$

b) Etudier: $\lim\limits_{x\to+\infty} A(k)$

9) Exercice: 1) Déterminer les réels a et b tels que: $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{x+1}$

2) Déterminer les primitives de $f(x) = \dfrac{1}{x(x+1)}$ (préciser sur quel(s) intervalle(s))

10) Exercices:

1)a) Déterminer D_f , le domaine de définition de la fonction $f(x) = \ln(x-3) - \ln(2x-6)$

b) Montrer que la fonction f a une dérivée nulle sur D_f

c) Donner l'expression la plus simple possible de f(x) sur $]3;+\infty[$

2)a) Déterminer le domaine de définition le domaine de dérivation, puis la dérivée de $u(x) = x.\ln x$

b) Montrer que $F(x) = x.\ln x - x$ est une primitive de $f(x) = \ln x$ sur $]0\,;\,+\infty[$

c) Retrouver le résultat ci-dessus en effectuant une intégration par parties

3)a) Déterminer le domaine de définition le domaine de dérivation, puis la dérivée $u(x) = (3x-5).\ln(3x-5)$

b) Montrer que $F(x) = \dfrac{1}{3}(3x-5).\ln(3x-5)-x$ est une primitive de $f(x) = \ln(3x-5)$ sur $\left]\dfrac{5}{3}\,;\,+\infty\right[$

c) Retrouver le résultat ci-dessus en effectuant une intégration par parties

11) Exercice: Déterminer les primitives des fonctions: (préciser sur quel(s) intervalle(s))

a) i) $f(x) = x.\ln x$ ii) $f(x) = (x+1).\ln x$ iii) $f(x) = x^2.\ln x$ iv) $f(x) = x^2.\ln(x+1)$
b) i) $f(x) = \ln(x^2+1)$ ii) $f(x) = \ln(x^2-1)$

IV) Fonction logarithme de base 10 :

1) Définition: On appelle fonction logarithme de base 10 , la fonction notée: $\log_{10}x$ ou $\log x$

définie par: $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$

2) Etude et propriétés de la fonction logarithme de base 10 :

a) Dresser le tableau de variation de la fonction logarithme de base 10

$\log(1) =$; $\log(10) =$

b) Propriétés fondamentales:

i) Quels que soient les réels α et β de $]0;+\infty[$ $\log(\alpha\times\beta) =$ et $\log\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right) =$

ii) Quel que soit le nombre rationnel r : $\log(10^r) =$

c) Exemples: $\log(10^4) =$; $\log(10^{-3}) =$

3) Application: En chimie, la concentration en ions H^+ (H_3O^+) d'une solution aqueuse, s'exprime par le rapport entre le nombre d'ions H^+ (H_3O^+) et le nombre des autres molécules d'eau (H_2O)

S'il y a un ion H^+ (H_3O^+) pour 100 autres molécules d'eau
la concentration est de $\dfrac{1}{100} = 10^{-2}$
S'il y a 4 ions H^+ (H_3O^+) pour 10^8 autres molécules d'eau
la concentration est de $\dfrac{4}{10^8} = 4.10^{-8}$

Par définition: Le P.H. d'une solution est égale à l'opposé du logarithme décimal de la concentration en ions H^+
Le P.H. de la 1$^{\text{ére}}$ solution est: $-\log(10^{-2}) =$
Le P.H. de la 2$^{\text{ième}}$ solution est: $-\log(4.10^{-8}) =$