

**DEVOIR DE SYNTHÈSE N 1**

Aucun document n'est permis

**Exercice 1 : ( 4 points )**

Cocher la bonne réponse :

1) Pour tout réel $x$ et $y$ , on a $\cos(x+y) =$	a) $\cos x + \cos y$	b) $\cos x \cos y - \sin x \sin y$	c) $\cos x \cos y + \sin x \sin y$
2) $\sin 2x \cos 3x - \cos 2x \sin 3x =$	a) $\sin x$	b) $\cos x$	c) $-\sin x$
3) $\cos\left(-\frac{7\pi}{6}\right) =$	a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$	c) $\frac{1}{2}$
4) $\sin\left(x + \frac{13\pi}{2}\right) =$	a) $\cos x$	b) $\sin x$	c) $-\cos x$
5) $\sin x = \frac{3}{5}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ on a $\cos x =$	a) $\frac{4}{5}$	b) $-\frac{4}{5}$	c) $\frac{-2}{5}$
6) l'équation $2\cos x + 1 = 0$ a pour solution dans $[0, \pi]$	a) $\frac{2\pi}{3}$	b) $\frac{\pi}{3}$	c) $\frac{4\pi}{3}$
7) Pour tout $x \in \left] \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6} \right[$ on a	a) $\sin x > \frac{1}{2}$	b) $\sin x < \frac{1}{2}$	c) $\sin x = \frac{1}{2}$
8) $(\cos x > 0$ et $\sin x < 0)$ a pour solution dans $] \pi, \pi ]$	a) $\left] \frac{-\pi}{2}, 0 \right[$	b) $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$	c) $\left] \frac{\pi}{2}, \pi \right[$

**Exercice 2 : ( 5 points )**Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on pose  $f(x) = 1 + \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$ 

On rappelle que :

$$\cos 2a = 2 \cos^2(a) - 1 = 1 - 2 \sin^2(a)$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

1) a) Calculer  $f\left(\frac{11\pi}{4}\right)$ ,  $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$  et  $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) Montrer que  $f$  est périodique de période  $\pi$ 

2) a) Montrer que  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ , et déduire que  $f(x) = 4 \cos x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

b) En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ 

3) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis dans  $] \pi, \pi ]$ ,  $f(x) = 0$

b) Résoudre dans  $\mathbb{R}$   $2f(x) > 1 + 2\sqrt{3} \sin 2x$

### Exercice 3 : (4 points)

La courbe à côté est la représentation graphique

Sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  d'une fonction  $f$

$T$  est la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse 2

1) Par lecture graphique, déterminer :

a)  $f(2)$  et les limites de  $f$  en  $1^+$ ,  $1^-$  et  $+\infty$

b)  $f'(2)$

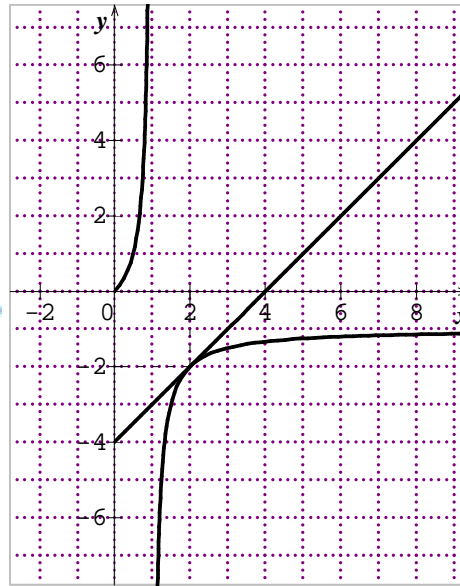
2) On admet que  $f(x) = \frac{-x}{|x| - 1}$

a) Déterminer le domaine de définition de  $f$

b) Déterminer les limites de  $f$  en  $-1^-$ ,  $-1^+$  et  $-\infty$

3) a) Montrer que  $f$  est dérivable en  $-2$  et préciser  $f'(-2)$

b) Écrire une équation de la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $-2$



### Exercice 4 : (7 points)

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{4x - 1}{\sqrt{x(2\sqrt{x} + 1)}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1) Justifier que  $f$  est bien définie sur  $\mathbb{R}$

2) Montrer que  $f$  est continue en 1 et Justifier que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$

3) a) Montrer que pour tout  $x > 1$ ,  $f(x) = \frac{-1}{\sqrt{x}} + 2$

b) Trouver les limites de  $f$  en  $+\infty$  et  $-\infty$

4) a) Soit  $a$  et  $b \in ]1, +\infty[$  avec  $a < b$ , montrer que  $f(a) < f(b)$ . Que peut-on déduire ?

b) Soit  $a$  et  $b \in ]-\infty, 1]$ , montrer que  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = a + b - 2$  et déduire le sens de variation de  $f$  sur  $]-\infty, 1]$

5) Montrer que  $f$  est dérivable à gauche et à droite en 1,  $f$  est-elle dérivable en 1 ?

6) a) Soit  $x_0 < 1$ , Montrer que  $f$  est dérivable en  $x_0$  et préciser  $f'(x_0)$

b) On note  $C_f$  la représentation graphique de  $f$  dans un repère orthonormé.

Montrer que la tangente à  $C_f$  au point d'abscisse  $\frac{1}{2}$  est parallèle à  $D : y = -x$