

DEVOIR DE SYNTHÈSE N 1**Exercice 1 : (4 points)**

Répondre par vraie ou faux et corriger la proposition fautive

1) $f : x \mapsto x^2 - \sqrt{x}$ avec $x \in]0, +\infty[$

a) La fonction dérivée de f est définie sur $]0, +\infty[$ par $f' : x \mapsto \frac{3x^2}{2\sqrt{x}}$

b) D'après le théorème des accroissements finis, il existe au moins un réel $c \in]0, 1[$ tel que $f'(c) = -1$

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a

a) A est la matrice unité d'ordre 2

b) $A^2 = A$

c) L'inverse de A est A

Exercice 2 : (6 points)

Une entreprise de confection de vêtements fabrique des jupes, des robes et pantalons.

Pour fabriquer une jupe, il faut 1.5 m de tissu, 4 boutons et une fermeture

Pour fabriquer une robe, il faut 2 m de tissu, 8 boutons et une fermeture

Pour fabriquer un pantalon, il faut 1,5 m de tissu, 2 boutons et une fermeture

Soit $A = \begin{pmatrix} 1.5 & 2 & 1.5 \\ 4 & 8 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} -6 & 0.5 & 8 \\ 2 & 0 & -3 \\ 4 & -0.5 & -4 \end{pmatrix}$

1) a) Donner l'ordre de A

b) Que représente la première colonne de A , la deuxième colonne de A et la troisième colonne de A ?

2) a) Montrer que A est inversible

b) Montrer que A' est l'inverse de A

3) Déterminer les quantités de tissus (en mètres), de boutons et de fermetures utilisés pour la fabrication de

100 jupes, 80 robes et 60 pantalons

4) L'entreprise dispose de 620 m de tissus, 1680 boutons et 380 fermetures, combien de robes, de jupes et de pantalons peut-elle fabriquer ?

Exercice 3 : (4 points)

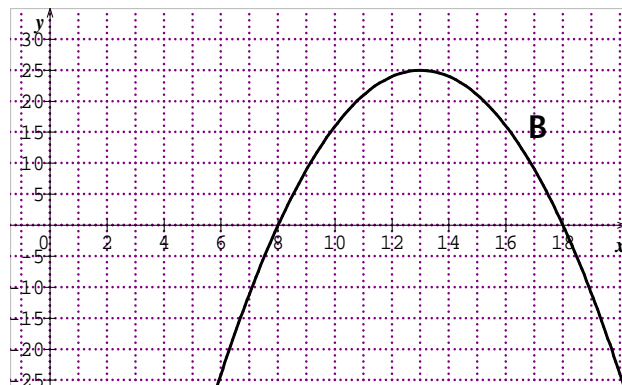
Une entreprise décide de fabriquer et de commercialiser un produit. Le coût de production, exprimé en milliers de dinars, en fonction du nombre x de tonnes produits est modélisé par :

$$C(x) = x^2 - 30x + 196 \quad \text{avec } x \in [6, 20]$$

1) La fonction bénéfice B est représentée à côté

a) Déterminer graphiquement l'intervalle de production dans lequel l'entreprise assure un bénéfice positif.

b) Déterminer le nombre de tonnes à produire pour assurer un bénéfice maximal et préciser ce bénéfice maximal



2) Pour affaiblir la concurrence, l'entreprise décide de vendre son produit le moins cher possible tout en

assurant un bénéfice. Soit $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$ le coût moyen de fabrication de x tonnes du produit

a) Exprimer $C_m(x)$ en fonction de x et calculer $(C_m)'(x)$

b) Étudier les variations de C_m dans $[6, 20]$

c) En déduire la valeur x_0 qui assure un coût moyen minimal

Exercice 4 : (6 points)

$$\text{Soit } f(x) = x^3 - 3x - 1, \quad x \in [-1, 1]$$

On note C la représentation graphique de f dans un repère orthonormé

1) Dresser le tableau de variation de f

2) a) Montrer que C admet un point d'inflexion A qu'on précisera

b) Écrire une équation de la tangente à C au point A

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[-1, 1]$ et que $-0,2 < \alpha < 0,1$

b) Déterminer la position relative de C et $D: y = x$

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle J qu'on précisera

b) Tracer C et D , et déduire la courbe de la fonction réciproque de f notée f^{-1}

c) Sur quel ensemble f^{-1} est-elle dérivable? préciser $(f^{-1})'(-1)$